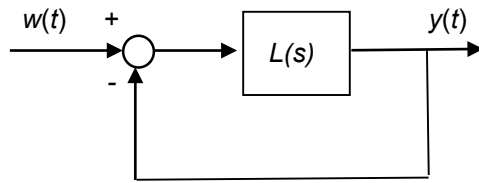
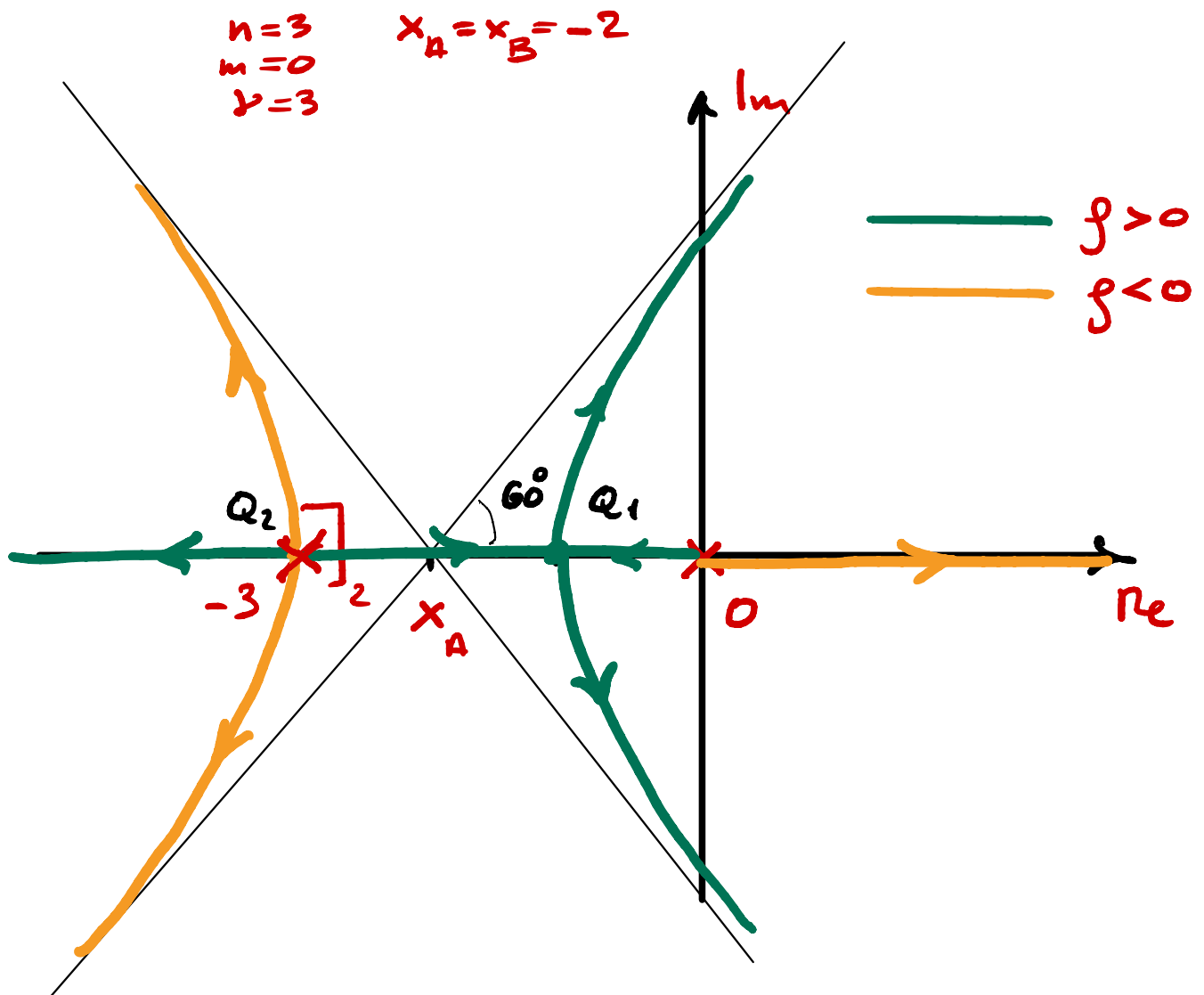


ESERCIZIO 1

Si consideri il sistema dinamico mostrato in figura, con $L(s) = \frac{p}{s(s+3)^2}$.



1.1) Tracciare l'andamento qualitativo del luogo delle radici, calcolando in particolare i punti di diramazione sull'asse reale.



-PUNTI DI DIRAMAZIONE

$$\gamma(x) = -x(x+3)^2 = -x^3 - 6x^2 - 9x$$

$$\gamma'(x) = -3x^2 - 12x - 9 = 0 \Rightarrow$$

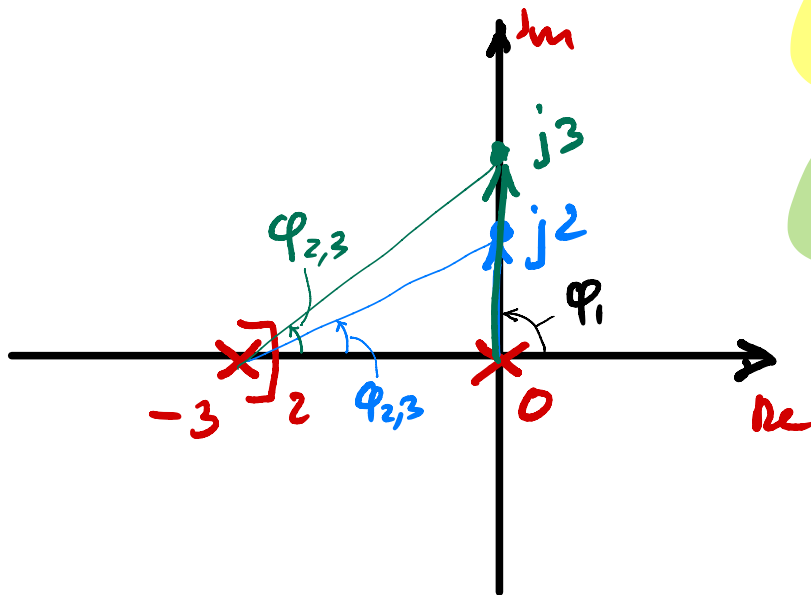
$$x_1 = -1 \quad P_1$$

$$x_3 = -3 \quad P_2$$

1.2) Usando la caratterizzazione geometrica del luogo delle radici, verificare quale delle coppie di valori complessi $\pm j2$ o $\pm j3$ appartiene al luogo.

- UN PUNTO APPARTIENE AL LUOGO SE E SOLO SE

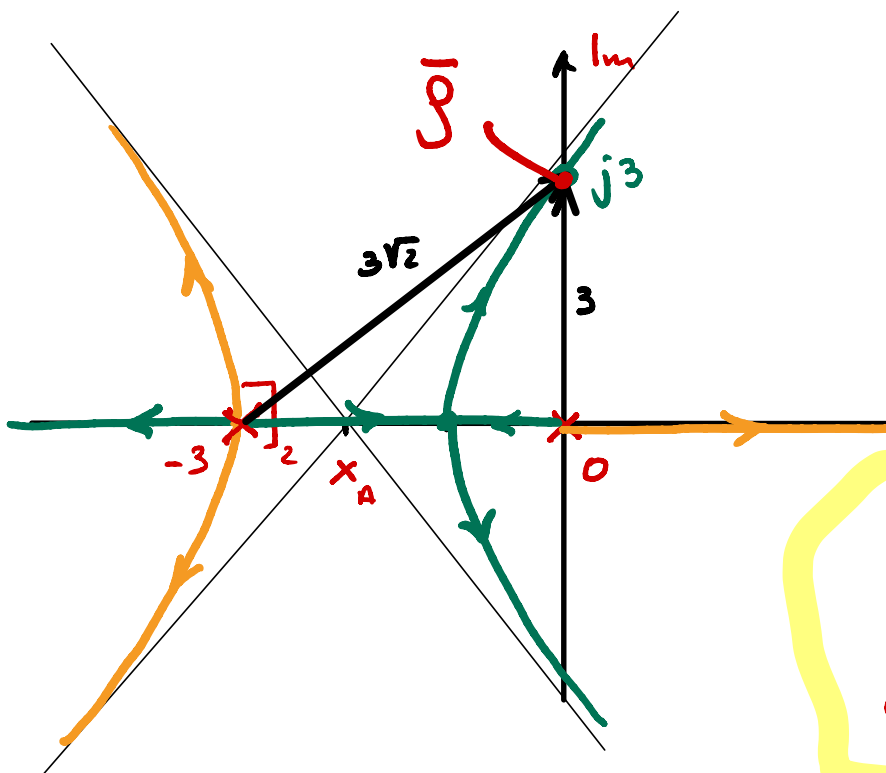
$$\sum_i \theta_i - \sum_i \varphi_i = k \cdot 180^\circ$$



$j2$ $-90^\circ - 2 \arctan \frac{2}{3} \approx -157^\circ$
 NON APPARTIENE AL LUOGO

$j3$ $-90^\circ - 2 \arctan 1 = -180^\circ$
 APPARTIENE AL LUOGO

1.3) In base al luogo delle radici, discutere per quali valori del parametro ρ tra $-\infty$ e $+\infty$ il sistema retroazionato risulta asintoticamente stabile.



$$\bar{\rho} = 3 \cdot (3\sqrt{2})^2 = 54$$

AS. STAB.
 \updownarrow
 $0 < \rho < \bar{\rho}$

ESERCIZIO 2

Si debba progettare un sistema di controllo per il processo descritto da $G(s) = \frac{10}{s}e^{-2s}$.

2.1) Utilizzando uno schema di controllo standard con un regolatore proporzionale $R(s) = \mu_R$, progettare $R(s)$ in modo da garantire un margine di fase $\varphi_m \geq 75^\circ$.

$$L(s) = \frac{10\mu_R}{s} e^{-2s}$$

$$\omega_c = 10\mu_R$$

$$\varphi_m = 90^\circ - 2\omega_c \frac{180^\circ}{\pi} \geq 75^\circ \implies \omega_c \leq \frac{\pi}{24} \approx 0.13$$

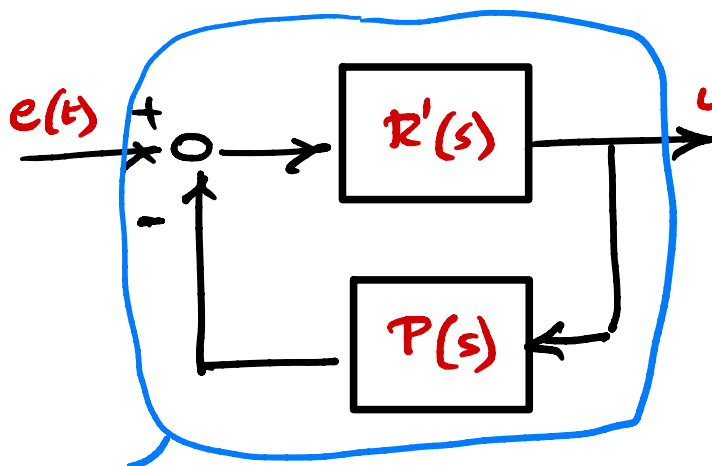
LIMITAZIONE

$$\mu_R = \frac{\omega_c}{10} \leq 0.013$$

- PER ESEMPIO

$$\mu_R = 0.01 \implies \begin{cases} \omega_c = 0.1 \\ \varphi_m \approx 78^\circ \end{cases}$$

2.2) Progettare un regolatore basato sullo schema a predittore di Smith con l'obiettivo di migliorare le prestazioni ottenute con il precedente progetto.



$$P(s) = \frac{10}{s}(1 - e^{-2s})$$

$$R'(s) = \mu'_R$$

- PER MIGLIORARE LE PRESTAZIONI POSSIAMO SCEGLIERE, PER ESEMPIO,

$$\mu'_R = 10\mu_R = 0.1$$

$R(s)$

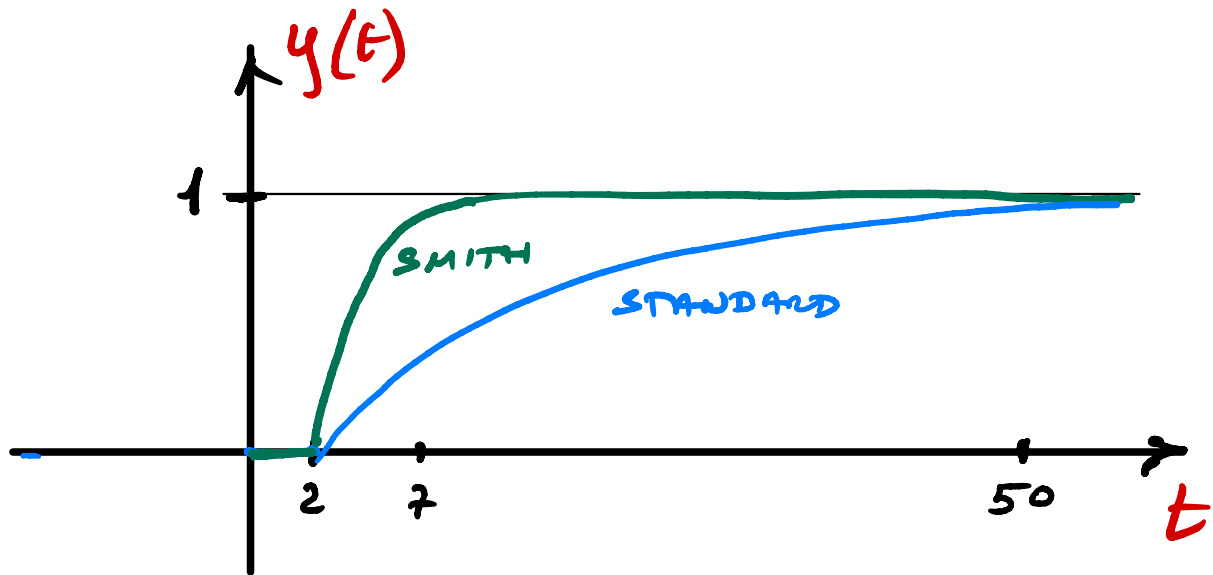
- SUL SISTEMA "FITTIZIO" SI HA:

$$\begin{cases} \omega'_c = 1 \\ \varphi'_m = 90^\circ \end{cases}$$

$$R(s) = \frac{0.1}{1 + \frac{1}{s}(1 - e^{-2s})} =$$

$$= \frac{0.1s}{s + 1 - e^{-2s}}$$

2.3) Confrontare le prestazioni dei due regolatori progettati in risposta a un riferimento a scalino, disegnando l'andamento nel tempo della variabile controllata in ciascuno dei due casi.



- STANDARD: $t_2 \approx \frac{5}{\omega_c} = 50$

- SMITH: $t_2' \approx \tau + \frac{5}{\omega_c'} = 7$

2.4) Si determini un'approssimazione razionale del regolatore basato sullo schema a predittore di Smith, valutandone poli, zeri e guadagno.

- PONENDO $R'(s) = \mu_R'$ E USANDO L'APPROX. DI PADE':

$$R(s) = \frac{\mu_R'}{1 + \frac{10\mu_R'}{s}(1 - e^{-2s})} \approx \frac{\mu_R'}{1 + \frac{10\mu_R'}{s}\left(1 - \frac{1-s}{1+s}\right)} =$$

$$= \frac{\mu_R'}{1 + \frac{10\mu_R'}{s} \frac{2s}{1+s}} = \frac{\mu_R'(1+s)}{1+s+20\mu_R'}$$

- POLO: $-1 - 20\mu_R'$

- ZERO: -1

- GUADAGNO: $R(0) = \frac{\mu_R'}{1+20\mu_R'}$

PER ESEMPIO CON

$$\mu_R' = 0.1$$

- POLO: -3

- ZERO: -1

- GUADAGNO: $\frac{1}{30}$

ESERCIZIO 3

Si consideri un sistema di controllo a tempo continuo dove la funzione di trasferimento del sistema da controllare vale $G(s) = \frac{4}{s+10}$ e quella del regolatore è $R(s) = \frac{s+10}{s}$. Il sistema di controllo viene realizzato in tecnologia digitale, adottando per il mantentore e il campionatore lo stesso periodo pari a $T = 0.5$ secondi.

3.1) Si discuta se, considerando le caratteristiche del sistema di controllo a tempo continuo, il periodo di campionamento T risulta avere un valore adeguato.

$$L(s) = \frac{4}{s} \Rightarrow \omega_c = 4$$

$$\omega_s = \frac{2\pi}{T} = 4\pi \approx 13$$

- DOVREBBE ESSERE $\frac{2\pi}{5\omega_c} \leq T \leq \frac{2\pi}{5\omega_c}$
OVERLAP

$$0.03 \leq T \leq 0.3$$

- QUINDI LA SCELTA $T=0.5$ NON È ADEGUATA.

3.2) Si ricavi l'espressione del regolatore a tempo discreto $R^*(z)$, ottenuto da $R(s)$ utilizzando il periodo di campionamento $T = 0.5$ e il metodo di *Eulero all'indietro*. Si ricavi inoltre l'equazione ricorsiva che descrive tale regolatore nel dominio del tempo.

$$\text{E I! } s = \frac{z-1}{Tz} = z \frac{z-1}{z}$$

$$\begin{aligned} R^*(z) &= R\left(z \frac{z-1}{z}\right) = 1 + \frac{10}{z \frac{z-1}{z}} = 1 + \frac{5z}{z-1} = \\ &= \frac{6z-1}{z-1} \end{aligned}$$

- LEGGE DI CONTROLLO!

$$u^*(k) = u^*(k-1) + 6e^*(k) - e^*(k-1)$$

3.3) Sapendo che la funzione di trasferimento a segnali campionati del sistema da controllare vale approssimativamente $G^*(z) = \frac{0.4}{z-0.007}$, si analizzi, adottando il punto di vista a tempo discreto, la stabilità del sistema di controllo digitale realizzato, verificandone l'instabilità.

$$L(z) = R^*(z) G^*(z) = \frac{0.4(6z-1)}{(z-1)(z-0.007)}$$

$$\begin{aligned} \varphi_{nc}(z) &= (z-1)(z-0.007) + 0.4(6z-1) \approx \\ &\approx z^2 + 1.393z - 0.393 = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow z_{1,2} \approx \begin{cases} 0.24 \\ -1.63 \end{cases} \text{ HA MODULO } > 1$$

↓
INSTABILITÀ

3.4) Calcolare l'espressione del regolatore "equivalente" a tempo continuo $\tilde{R}(s)$ corrispondente al regolatore digitale progettato, utilizzando l'espressione esatta della funzione di trasferimento $H_0(s)$ del mantenedor. Inoltre, sapendo che la pulsazione critica della funzione d'anello $\tilde{L}(s) = \tilde{R}(s)G(s)$ è pressoché invariata rispetto a quella del progetto originale a tempo continuo, si verifichi l'asintotica stabilità del sistema di controllo "equivalente" a tempo continuo.

$$\begin{aligned} \tilde{R}(s) &= \frac{H_0(s)}{T} R^*(e^{sT}) = \frac{1-e^{-0.5s}}{0.5s} \frac{6e^{0.5s}-1}{e^{0.5s}-1} = \\ &= \frac{6-e^{-0.5s}}{0.5s} \end{aligned}$$

$$\tilde{L}(s) = \frac{8(6-e^{-0.5s})}{s(s+10)} \quad \tilde{\omega}_c = 4 \text{ (DAL TESTO)}$$

$$\tilde{\varphi}_c = -90^\circ - \arctg(0.4) + \angle(6-e^{-j2}) \approx -104^\circ$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} \tilde{\varphi}_m &= 180^\circ - |\tilde{\varphi}_c| \approx 76^\circ > 0^\circ \\ \tilde{\mu} &= \tilde{L}(0) = 4 > 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{As. STAB.}$$

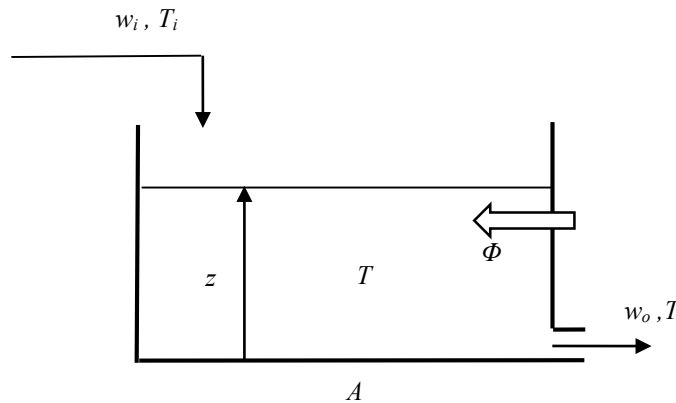
BODE

3.5) Si discuta, motivando opportunamente la risposta, quale dei due approcci proposti per l'analisi di stabilità del sistema di controllo è da considerarsi più affidabile.

- L'APPROCCIO A TEMPO DISCRETO (VEDI 3.3) È PIÙ AFFIDABILE, PERCHÈ BASATO SUL CALCOLO ESATTO DI $G^*(z)$. SE IL SISTEMA RETROAZIONATO A TEMPO DISCRETO È INSTABILE, LO È CERTAMENTE IL SISTEMA DI CONTROLLO DIGITALE.
 - INVECE L'APPROCCIO A T. CONTINUO (VEDI 3.4) È MENO AFFIDABILE, A CAUSA DELLE INEVITABILI APPROSSIMAZIONI, SOPRATTUTTO QUANDO IL PERIODO DI CAMPIONAMENTO T NON VIENE SCELTO IN MODO ADEGUATO. QUI INDICA ERRONEAMENTE LA STABILITÀ QUANDO INVECE IL SISTEMA È INSTABILE.
-

ESERCIZIO 4

Si consideri il sistema termo-idraulico mostrato in figura. Si desidera controllare congiuntamente il livello $z(t)$ e la temperatura $T(t)$ del liquido nel serbatoio. La potenza termica scambiata con l'ambiente attraverso le pareti è data da $\Phi(t) = ku(t)z(t)$ (al crescere di $z(t)$ aumenta infatti linearmente l'area di scambio di calore), dove $u(t)$ è una variabile di controllo. L'altra variabile di controllo è la portata di afflusso $w_i(t)$. La temperatura $T_i(t)$ del fluido in ingresso è un disturbo mentre la portata di scarico w_o è costante. Si supponga che il liquido sia ben miscelato e che siano trascurabili gli scambi di lavoro meccanico con l'ambiente. Si indichi con A l'area di base del serbatoio, con ρ la densità del liquido e con c il calore specifico del liquido.



4.1) Ricavare il modello dinamico nonlineare del processo.

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = \frac{1}{\rho A} (w_i(t) - w_o) & \text{CONS. MASSA} \\ \dot{T}(t) = \frac{1}{c \rho A z(t)} \left(c w_i(t) (T_i(t) - T(t)) + k u(t) z(t) \right) & \text{CONS. ENERGIA} \end{cases}$$

4.2) Supponendo di linearizzare il modello intorno a un generico stato di equilibrio, determinare i valori dei parametri $\alpha, \beta_i, \gamma_i$ del seguente modello linearizzato:

$$\delta \dot{z}(t) = \alpha \delta w_i(t)$$

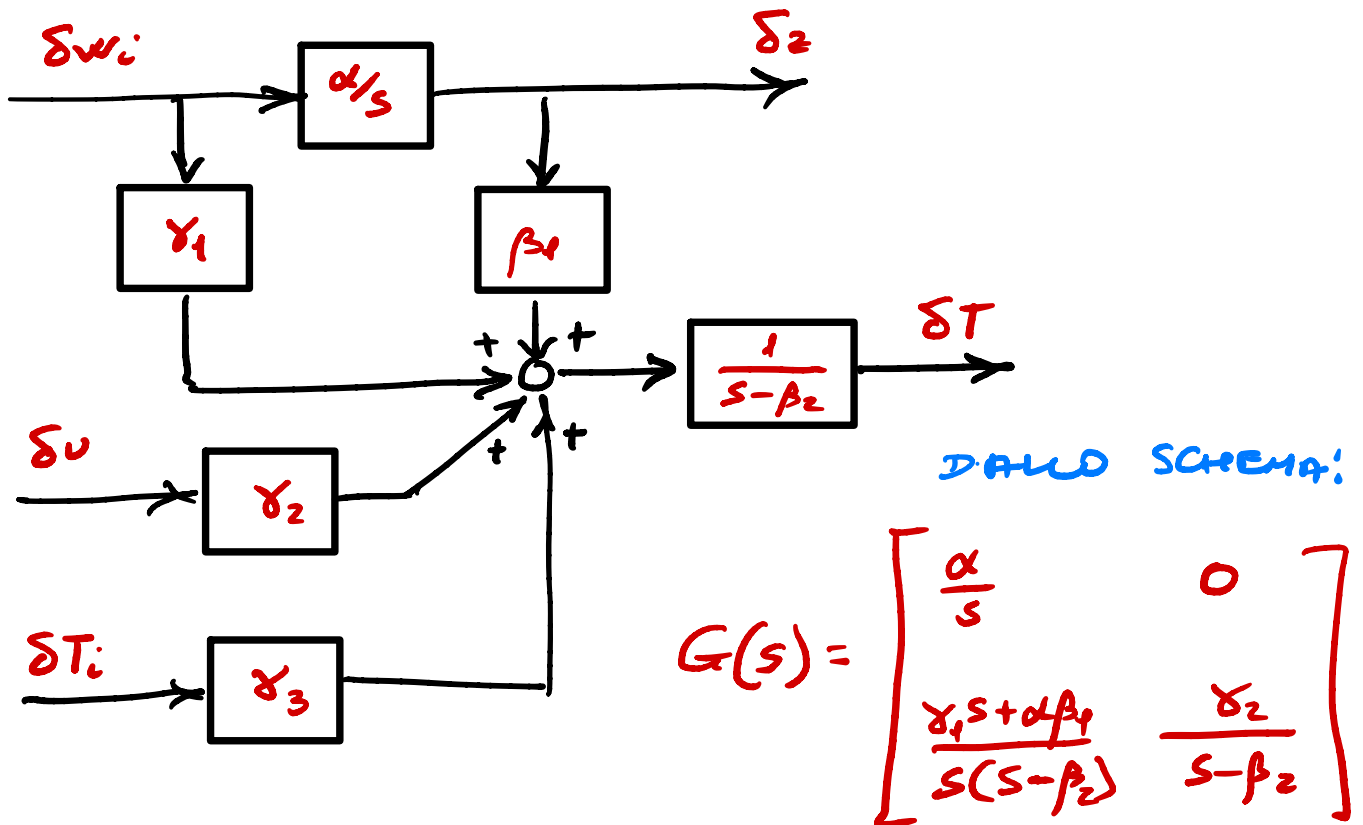
$$\delta \dot{T}(t) = \beta_1 \delta z(t) + \beta_2 \delta T(t) + \gamma_1 \delta w_i(t) + \gamma_2 \delta u(t) + \gamma_3 \delta T_i(t)$$

$$\alpha = \frac{1}{\rho A}, \quad \beta_1 = - \frac{\bar{w}_i (\bar{T}_i - \bar{T})}{\rho A \bar{z}^2} = \frac{k \bar{u}}{c \rho A \bar{z}},$$

$$\beta_2 = - \frac{\bar{w}_i}{\rho A \bar{z}},$$

$$\gamma_1 = \frac{\bar{T}_i - \bar{T}}{\rho A \bar{z}}, \quad \gamma_2 = \frac{k}{c \rho A}, \quad \gamma_3 = \frac{\bar{w}_i}{\rho A \bar{z}}$$

4.3) Disegnare lo schema a blocchi del modello linearizzato e calcolare la corrispondente matrice di trasferimento $G(s)$ tra gli ingressi manipolabili $\delta w_i(t)$ e $\delta u(t)$ e le uscite $\delta z(t)$ e $\delta T(t)$.



4.4) Progettare un disaccoppiatore per il sistema MIMO descritto da $G(s)$.

DISACCOPIATORE PER SISTEMI TRIANGOLARI:

$$\Delta(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{G_{21}(s)}{G_{22}(s)} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{\gamma_1 s + \alpha \beta_1}{\gamma_2 s} & 1 \end{bmatrix}$$