**ESERCIZIO 1**

Si consideri un sistema di controllo in anello chiuso con funzione di trasferimento d'anello:

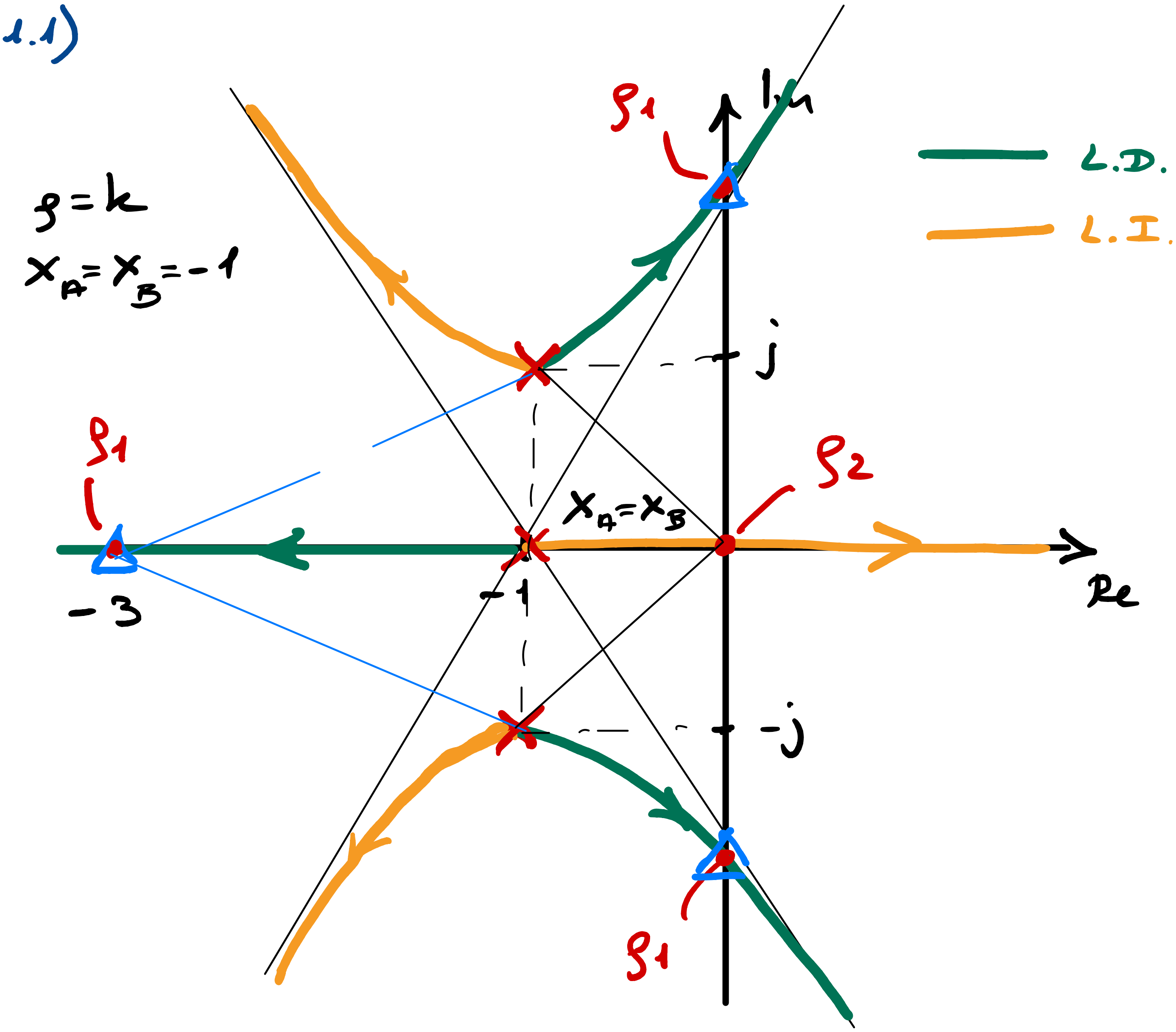
$$L(s) = \frac{k}{(s+1)(s^2+2s+2)}$$

**1.1)** Disegnare l'andamento qualitativo del corrispondente luogo delle radici (diretto e inverso) al variare del parametro reale $k$.

**1.2)** Sulla base del luogo disegnato, determinare i valori del parametro $k$ per cui il sistema in anello chiuso risulta asintoticamente stabile.

**1.3)** Per valori positivi del parametro $k$, discutere come si modifica lo smorzamento dei poli dominanti in anello chiuso al variare di $k$.

1.1)



1.2) AS. STAB. $\Longleftrightarrow$ $\rho_2 < k < \rho_1$

L.I.

_ REGOLA PUNTEGGIATURA: $\rho_2 = -1 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = -2$

L.D.

- CONSERVAZIONE BARICENTRO: $S_3(\rho_1) = -3$
- REGOLA PUNTEGGIATURA: $\rho_1 = 2\sqrt{5}\sqrt{5} = 10$

$$\boxed{\text{AS. STAB.} \Longleftrightarrow -2 < k < 10}$$

1.3) PER $k > 0$, I POLI DOMINANTI SI MUOVONO LUNGO I RAMI DEL L.D., PARTENDO DAI POLI IN A.A. $-1 \pm j$

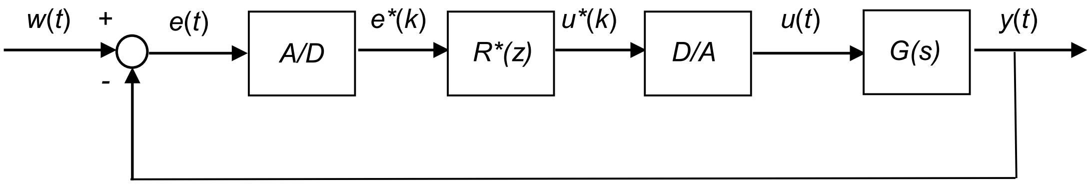
_ CON $k=0$ $\Longrightarrow$ $\xi = \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} \simeq 0.7$

- AL CRESCERE DI $k$, LO SMORZAMENTO DEI POLI DOMINANTI DIMINUISCE, FINO AD ANNULLARSI PER $k = 10$.

_ PER ULTERIORI AUMENTI DI $k$, IL SISTEMA DIVENTA INSTABILE (CON $\xi < 0$)

## ESERCIZIO 2

Con riferimento al sistema di controllo digitale illustrato dal seguente schema a blocchi




si supponga che il sistema da controllare sia descritto da $G(s) = 8$, il periodo di campionamento sia $T = 0.5$, e il regolatore digitale operi secondo il seguente algoritmo di controllo:

$$u^*(k) = u^*(k-1) + \mu e^*(k-2) \quad , \quad \mu > 0$$

**2.1)** Ricavare la funzione di trasferimento $R^*(z)$ del regolatore digitale.

**2.2)** Determinare la funzione di trasferimento $\tilde{R}(s)$ del regolatore analogico "equivalente".

**2.3)** Discutere la stabilità del sistema di controllo digitale al variare del parametro $\mu > 0$, usando la sua rappresentazione (approssimata) a tempo continuo.

**2.4)** Ripetere la discussione precedente al variare del parametro $\mu > 0$, usando la rappresentazione a tempo discreto del sistema di controllo digitale.

2.1) $$\boxed{R^*(z) = \frac{\mu}{z(z-1)}}$$

2.2) $$\boxed{\tilde{R}(s)} = \frac{H_0(s)}{T} R^*(e^{sT}) = \frac{1-e^{-sT}}{sT} \frac{\mu}{e^{sT}(e^{sT}-1)} =$$

$$= \frac{\mu}{sT} e^{-2sT} = \boxed{\frac{2\mu}{s} e^{-s}}$$

2.3) $\tilde{L}(s) = \tilde{R}(s)G(s) = \frac{16\mu}{s}e^{-s}$ , $\mu > 0$

$\tilde{\omega}_c = 16\mu$

$\tilde{\varphi}_m = 90° - 16\mu \frac{180°}{\pi}$

- CRITERIO DI BODE

$\boxed{\text{AS. STAB.}} \Longleftrightarrow \tilde{\varphi}_m > 0° \Longleftrightarrow \boxed{\mu < \frac{\pi}{32}}$

2.4) SISTEMA A SEGNALI CAMPIONATI: $G^*(z) = 8$

$L(z) = R^*(z)\, G^*(z) = \frac{8\mu}{z(z-1)}$

$\varphi_{AC}(z) = z^2 - z + 8\mu$

AS. STAB.

$\Updownarrow$

$|z_{1,2}| < 1$

- POLI IN A.C.: $z_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1-32\mu}$

- CON $0 < \mu \leq \frac{1}{32}$ $z_{1,2}$ REALI $|z_{1,2}| < 1$

- CON $\frac{1}{32} < \mu < \frac{1}{8}$ $z_{1,2}$ COMPLESSI CON $|z_{1,2}| < 1$

- CON $\mu = \frac{1}{8}$ $z_{1,2} = \frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$ $|z_{1,2}| = 1$

$\boxed{\text{AS. STAB.} \Longleftrightarrow \mu < \frac{1}{8}}$

(SI VEDE ANCHE CON L.D.R. APPLICATO A $L(z)$)

## ESERCIZIO 3

Si consideri un processo nonlineare descritto dalle seguenti relazioni:

$$\dot{x}_1(t) = -x_1(t)x_2(t) + x_1(t)u_1(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = -x_2^3(t) - u_1(t)x_2^2(t) + u_2(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

**3.1)** Verificare che, in corrispondenza degli ingressi $\bar{u}_1 = 1$ e $\bar{u}_2 = 2$, lo stato $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = 1$ è uno stato di equilibrio. Dire anche se ci sono altri stati di equilibrio con gli stessi ingressi.

**3.2)** Verificare che la matrice di trasferimento del modello linearizzato nell'intorno del precedente equilibrio è data da:

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{s+6}{s(s+5)} & -\frac{1}{s(s+5)} \\ -\frac{1}{s+5} & \frac{1}{s+5} \end{bmatrix}$$

**3.3)** Per il modello linearizzato, progettare un disaccoppiatore secondo lo schema "in avanti".

**3.4)** Sul sistema disaccoppiato, progettare due regolatori in grado di stabilizzare il sistema e di fare in modo che, per entrambi gli anelli di controllo, la pulsazione critica sia maggiore di 10.

3.1) $0 = -1 + 1$ ✓ $\bar{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ È UNO STATO DI EQUILIBRIO
$0 = -1 - 1 + 2$

ANCHE $\bar{x} = \begin{bmatrix} \alpha \\ 1 \end{bmatrix}$, $\forall \alpha$ È STATO DI EQUILIBRIO

3.2) $A = \begin{bmatrix} -\bar{x}_2 + \bar{u}_1 & -\bar{x}_1 \\ 0 & -3\bar{x}_2^2 - 2\bar{u}_1\bar{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 & 0 \\ -\bar{x}_2^2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ $C = I$

$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \ldots\ldots$ COINCIDE CON QUELLA DEL TESTO

3.3)

$$\Delta_a(s) = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{G_{12}(s)}{G_{11}(s)} \\ -\frac{G_{21}(s)}{G_{22}(s)} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{s+6} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$G'(s) = G(s)\Delta_a(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+6} \end{bmatrix}$$

3.4)

– PROGETTO DI $R_1'(s)$ SU $G_{11}'(s) = \frac{1}{s}$

PER ESEMPIO $R_1'(s) = \mu_1 \, , \, \mu_1 > 10$

$$L_1(s) = \frac{\mu_1}{s} \implies \begin{cases} \omega_{c1} = \mu_1 > 10 \\ \varphi_{m1} = 90° \end{cases}$$

– PROGETTO DI $R_2'(s)$ SU $G_{22}'(s) = \frac{1}{s+6}$

PER ESEMPIO $R_2'(s) = k\frac{s+6}{s} \, , \, k > 10$

$$L_2(s) = \frac{k}{s} \implies \begin{cases} \omega_{c2} = k > 10 \\ \varphi_{m2} = 90° \end{cases}$$