ESERCIZIO 1

Si consideri il sistema dinamico descritto dalle seguenti equazioni:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \qquad A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ \alpha + 4 & \alpha \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$y(t) = Cx(t)$$

dove α è un parametro reale.

1.1) Basandosi solo sulla traccia della matrice A, spiegare cosa si può concludere sulla stabilità (o instabilità) del sistema al variare di α.

$tr(A) = \alpha - 1$

$\alpha > 1 \Rightarrow tr(A) > 0 \Rightarrow$ INSTABILE

$\alpha = 1 \Rightarrow tr(A) = 0 \Rightarrow$ NON AS. STABILE

$\alpha < 1 \Rightarrow tr(A) < 0 \Rightarrow$?

(NON SI PUÒ CONCLUDERE NULLA)

1.2) Determinare la condizione necessaria e sufficiente sul parametro α perché il sistema sia asintoticamente stabile.

$$\varphi(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^2 + (1-\alpha)\lambda + \alpha + 8$$

- CON IL CRITERIO DI CARTESIO

$$\text{AS. STAB.} \Longleftrightarrow \begin{cases} 1-\alpha > 0 \\ \alpha + 8 > 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \boxed{-8 < \alpha < 1}$$

1.3) Ponendo $\alpha = 1$, determinare la funzione di trasferimento del sistema, verificando che essa è in realtà un vettore. Spiegare poi cosa rappresenta ciascuno degli elementi di tale vettore.

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} \dfrac{2(s+4)}{s^2+9} \\ \dfrac{2(s-1)}{s^2+9} \end{bmatrix}$$

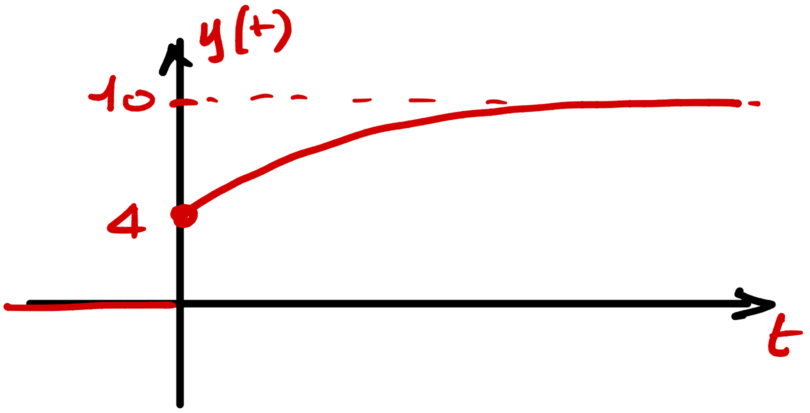
→ I 2 ELEMENTI DEL VETTORE RAPPRESENTANO LE FDT TRA L'INGRESSO u E LE 2 USCITE y_1 E y_2

ESERCIZIO 2

Si sappia che la risposta allo scalino di un sistema dinamico a tempo continuo è data da

$$y(t) = 10 - 6e^{-2t}, t \geq 0.$$

2.1) Dopo aver disegnato l'andamento di tale risposta, dire se si può affermare che il sistema è strettamente proprio oppure no. Valutare inoltre il tempo necessario perché la risposta si assesti sul valore di regime.



$y(0^+) \neq 0$

$\Downarrow$

SIST. NON STRETT. PROPRIO

$t_a \simeq 5\tau = \frac{5}{2}$

2.2) Ricavare la funzione di trasferimento $G(s)$ del sistema.

$$Y(s) = \frac{10}{s} - \frac{6}{s+2} = \frac{4s+20}{s(s+2)} \qquad U(s) = \frac{1}{s}$$

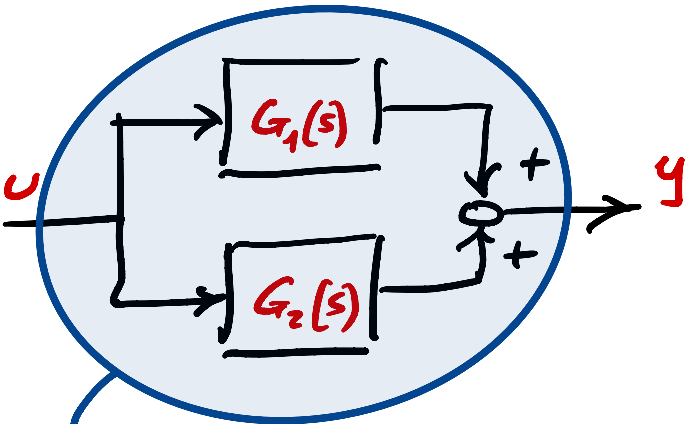
$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{4s+20}{s+2}$$

2.3) Dire se il sistema in esame può essere descritto come parallelo di due sotto-sistemi dinamici del primo ordine. In caso affermativo, determinare le funzioni di trasferimento di tali sotto-sistemi.

- SÌ, PER ESEMPIO

$$G_1(s) = \frac{4s}{s+2}$$

$$G_2(s) = \frac{20}{s+2}$$



$G(s) = G_1(s) + G_2(s)$

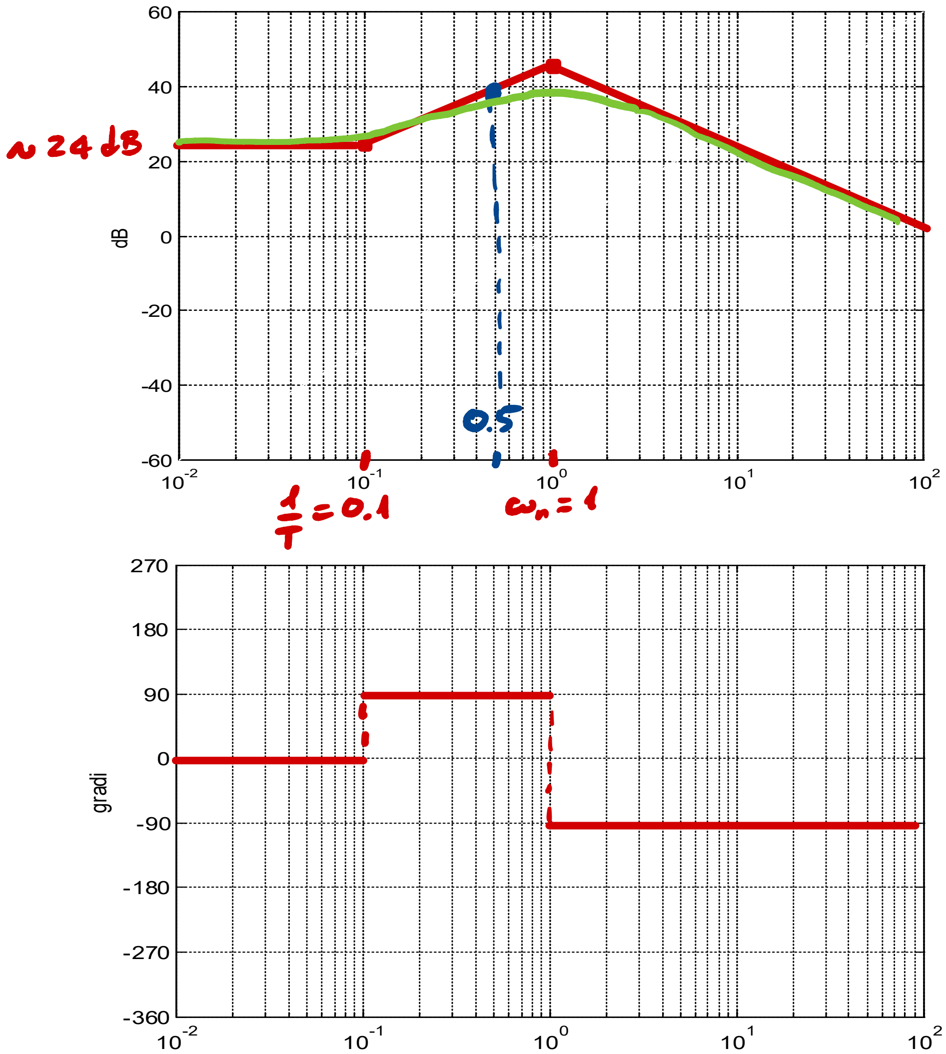
ESERCIZIO 3

Si consideri un sistema a tempo continuo del secondo ordine, asintoticamente stabile, con guadagno statico $\mu = 15$, uno zero con costante di tempo $T = 10$ e una coppia di poli complessi coniugati con pulsazione naturale $\omega_n = 1$ e smorzamento $\xi = 0.8$.

3.1) Scrivere l'espressione della corrispondente funzione di trasferimento $G(s)$.

$$G(s) = \frac{15(1+10s)}{s^2+1.6s+1}$$

3.2) Tracciare qua sotto i diagrammi (asintotici) di Bode del modulo e della fase associati a $G(s)$.



3.3) Sulla base dei diagrammi, valutare l'ampiezza delll'uscita asintotica in risposta all'ingresso $u(t) = 2\,\text{sen}(t/2)$. Dire inoltre se l'azione filtrante del sistema può essere considerata di tipo "passa-basso".

- DAL DIAGRAMMA:

$$|G(j0.5)|_{dB} \simeq 38\,dB \implies |G(j0.5)| \simeq 10^{38/20} \simeq 79$$

$$y(t) = B\,\text{sen}\left(\frac{t}{2} + \varphi\right) \qquad B = 2 \cdot |G(j0.5)| \simeq 140$$

- VERIFICA ANALITICA:

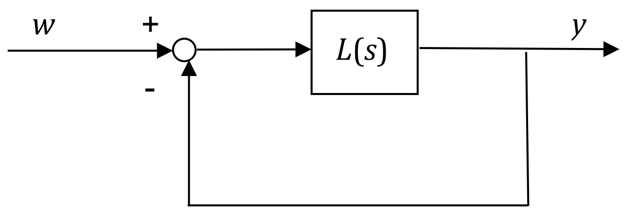
$$|G(j0.5)| = \frac{15\,|1+j5|}{|0.75+j0.8|} \simeq \frac{15 \cdot 5.1}{1.1} \simeq 70$$

LA DISCREPANZA DERIVA DALL'APPROX. ASINTOTICA

- IL SISTEMA NON È UN FILTRO PASSA-BASSO PERCHÈ AMPLIFICA MAGGIORMENTE ALLE MEDIE PULSAZIONI.

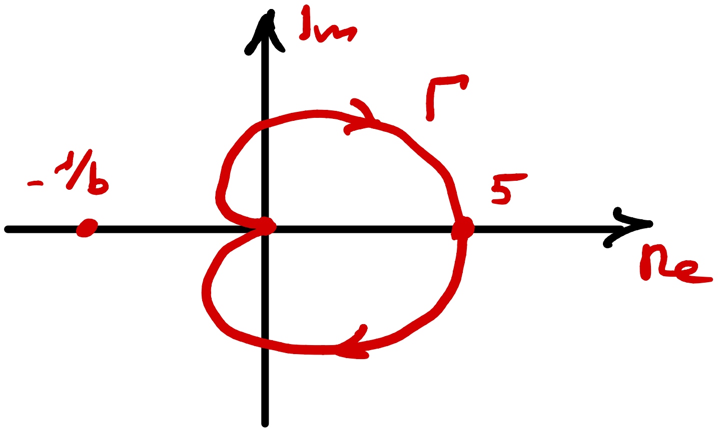
ESERCIZIO 4

Si consideri il sistema in anello chiuso mostrato in figura, dove $L(s) = \frac{5b}{(1+4s)^2}$ e b è un parametro reale.



4.1) Tracciare l'andamento qualitativo del diagramma di Nyquist della funzione d'anello quando $b = 1$.

$$L'(s) = \frac{5}{(1+4s)^2}$$



4.2) Mediante il criterio di Nyquist, discutere l'asintotica stabilità del sistema al variare di b .

$P = 0$ $\quad L(s) = b\,L'(s)$ $\quad$ SI CONTANO I GIRI DI Γ INTORNO A $-1/b$

$-\frac{1}{b} < 0$ OVVERO $b > 0 \implies N = 0 = P \implies$ AS. STAB.

$0 < -\frac{1}{b} < 5$ OVVERO $b < -\frac{1}{5} \implies N = -1 \neq P \implies$ INSTAB.

$-\frac{1}{b} = 5$ OVVERO $b = -\frac{1}{5} \implies N$ NON DEF. $\implies$ NON AS. STAB.

$-\frac{1}{b} > 5$ OVVERO $-\frac{1}{5} < b < 0 \implies N = 0 = P \implies$ AS. STAB.

IN CONCLUSIONE: AS. STAB. $\iff b > -\frac{1}{5}$

4.3) Verificare i risultati del punto precedente usando il polinomio caratteristico in anello chiuso.

$$\varphi_{AC}(s) = (1+4s)^2 + 5b = 16s^2 + 8s + 1 + 5b$$

- PER IL CRITERIO DI CARTESIO

AS. STAB. $\iff 1 + 5b > 0 \iff b > -\frac{1}{5}$

VERIFICA OK