ESERCIZIO 1

Si consideri il sistema dinamico a tempo continuo descritto dalle seguenti equazioni:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 1]$$
$$y(t) = Cx(t)$$

1.1) Calcolare stato e uscita di equilibrio in corrispondenza dell'ingresso $\bar{u} = -1$. Valutare anche la stabilità di tale condizione di equilibrio.

$$\begin{cases} 0 = 3x_2 - 4 \\ 0 = -x_1 - 4x_2 - 1 \\ y = x_1 + x_2 \end{cases} \Longrightarrow \bar{x} = \begin{bmatrix} -19/3 \\ 4/3 \end{bmatrix} \qquad \bar{y} = -5$$

$$\varphi(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^2 + 4\lambda + 3 = (\lambda+1)(\lambda+3)$$

AUTOVALORI: $\lambda_1 = -1 < 0$, $\lambda_2 = -3 < 0$ $\Longrightarrow$ EQUILIBRIO AS. STABILE

1.2) Scrivere l'espressione del movimento libero dell'uscita con $x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ e verificare che risulta $y_l(t) = 2e^{-t}, t \geq 0$.

$$y_l(t) = Ce^{At}x(0) = [1 \quad 1]e^{At}\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

- AUTOVALORI $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -3$
- MATRICE AUTOVETTORI

$$M = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad M^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = M\begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix}M^{-1} = \dots = \begin{bmatrix} 3e^{-t} - e^{-3t} & 3e^{-t} - 3e^{-3t} \\ -e^{-t} + e^{-3t} & -e^{-t} + 3e^{-3t} \end{bmatrix}$$

$$y_l(t) = Ce^{At}x(0) = \dots = 2e^{-t}, \; t \geq 0 \quad ✓$$

1.3) Calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$, valutando in particolare il tipo g e il guadagno μ.

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \dots = \frac{1}{(s+1)(s+3)}[s+3 \quad s+3]\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

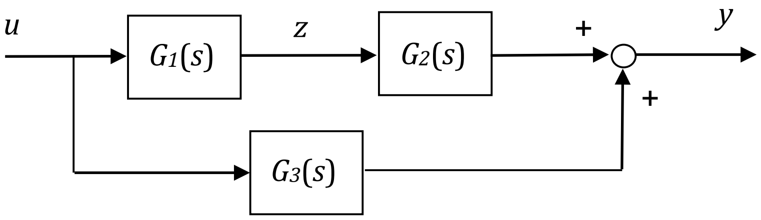
$$= \frac{5\cancel{(s+3)}}{(s+1)\cancel{(s+3)}} = \frac{5}{s+1}$$

- TIPO $g = 0$
- GUADAGNO $\mu = G(0) = 5$

ESERCIZIO 2

Si consideri il sistema descritto dal seguente schema a blocchi, dove

$$G_1(s) = \frac{4}{1+s} \quad , \quad G_2(s) = \frac{2}{s} \quad , \quad G_3(s) = \frac{1}{s}$$



2.1) Calcolare la funzione di trasferimento tra $u(t)$ e $y(t)$.

$$G(s) = G_1(s)\,G_2(s) + G_3(s) = \frac{8}{s(1+s)} + \frac{1}{s} =$$

$$= \frac{s+9}{s(s+1)}$$

2.2) Giudicare la stabilità del sistema complessivo.

- I POLI DI $G(s)$ SONO $0, -1$ $\Longrightarrow$ NON AS. STABILE
- IN REALTÀ È AVVENUTA UNA CANCELLAZIONE IN $s=0$

$\Longrightarrow$ SULLA BASE DI $G(s)$ È IMPOSSIBILE DISTINGUERE TRA INSTABILITÀ E SEMPLICE STAB.

NON RICHIESTO

- RAGIONANDO SULLA RAPPR. DI STATO:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + 4u \\ \dot{x}_2 = 2x_1 \\ \dot{x}_3 = u \\ y = x_2 + x_3 \end{cases}$$

SI TROVA $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

DIAGONALIZZABILE

$\Downarrow$

SEMPLICE STABILITÀ

2.3) Calcolare il movimento forzato dell'uscita $y(t)$ quando $u(t) = \mathrm{imp}(t)$.

$$Y(s) = G(s)U(s) = G(s) = \frac{s+9}{s(s+1)} = \frac{\alpha}{s} + \frac{\beta}{s+1}$$

$$\alpha(s+1) + \beta s = s+9 \implies \begin{aligned} \alpha &= 9 \\ \beta &= -8 \end{aligned}$$

$$y(t) = \alpha + \beta e^{-t} = 9 - 8e^{-t} \ , t \geq 0$$

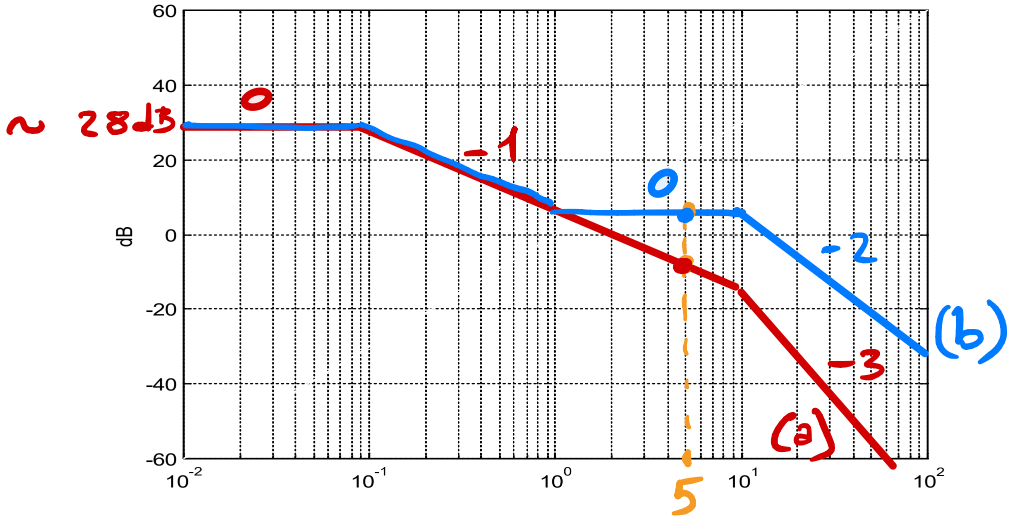
ESERCIZIO 3

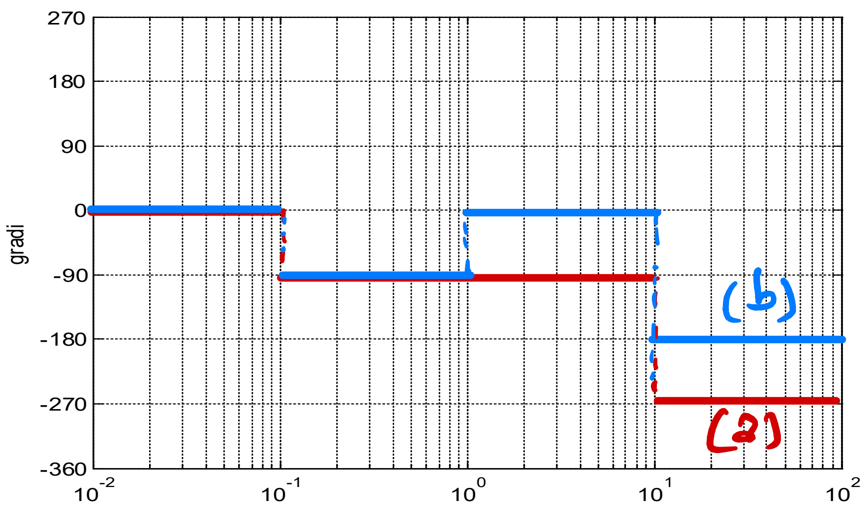
Si consideri un sistema a tempo continuo con ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$ e funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{25(1+sT)}{(1+10s)(1+0.1s)^2}$$

3.1) Tracciare i diagrammi (asintotici) di Bode del modulo e della fase associati a $G(s)$ nei due seguenti casi:

(a) $T = 0$, (b) $T = 1$





3.2) Sulla base dei diagrammi, valutare nei due casi (a) e (b) l'amplificazione applicata dal sistema a una sinusoide in ingresso di pulsazione $\omega = 5$.

(a) $|G(j5)|_{dB} \simeq -8\,dB \Longrightarrow |G(j5)| \simeq 0.4$

(b) $|G(j5)|_{dB} \simeq 8\,dB \Longrightarrow |G(j5)| \simeq 2.5$

3.3) Valutare il tempo di assestamento della risposta allo scalino del sistema nei due casi (a) e (b).

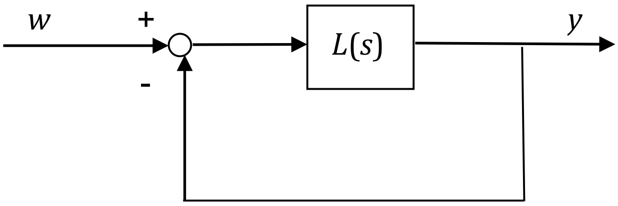
- IN ENTRAMBI I CASI

$$t_a \simeq 5\tau_{MAX} = 5 \cdot 10 = 50$$

(LA PRESENZA DELLO ZERO È IRRILEVANTE PER IL CALCOLO DI t_a)

ESERCIZIO 4

Si consideri il sistema in anello chiuso mostrato in figura.

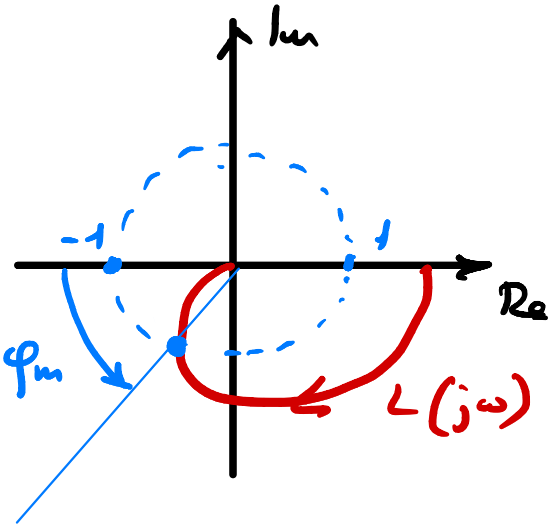


4.1) Dare la definizione di margine di fase φ_m .

$\varphi_m = 180° - |\varphi_c|$

$\varphi_c = \angle L(j\omega_c)$

$|L(j\omega_c)| = 1$



4.2) Spiegare in che senso il margine di fase di un sistema in anello chiuso rappresenta un indicatore di stabilità robusta.

φ_m È UN INDICATORE DI STABILITÀ ROBUSTA RISPETTO A INCERTEZZE SUL RITARDO D'ANELLO

$$\tau_{MAX} = \frac{\varphi_m}{\omega_c}\,\frac{\pi}{180°}$$ MAX RITARDO AMMISSIBILE

4.3) Calcolare il margine di fase φ_m quando $L(s) = \frac{\mu}{s}$, distinguendo i due casi $\mu > 0$ e $\mu < 0$.

- $\mu > 0$: $\omega_c = \mu$, $\varphi_c = -90°$ $\Longrightarrow$ $\varphi_m = 90°$
- $\mu < 0$: $\omega_c = |\mu|$, $\varphi_c = -270°$ $\Longrightarrow$ $\varphi_m = -90°$