ESERCIZIO 1

Si consideri il sistema dinamico a tempo continuo descritto dalle seguenti equazioni, dove p e q sono parametri reali:

$$\dot{x}_1(t) = -2x_1(t) + (5+3p)x_2(t) + qu(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = -x_1(t) + (1+p)x_2(t) + u(t)$$
$$y(t) = x_2(t)$$

1.1) Ricavare le matrici (A, B, C, D) che descrivono il sistema.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 5+3p \\ -1 & 1+p \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} q \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D = 0$$

1.2) Discutere la stabilità/asintotica stabilità/instabilità del sistema al variare dei parametri p e q .

$$\varphi(\lambda) = \det(\lambda I - A) = (\lambda+2)(\lambda-(1+p)) + 5 + 3p =$$
$$= \lambda^2 + (1-p)\lambda + 3 + p$$

- AS. STAB. $\underset{\text{CARTESIO}}{\Longleftrightarrow}$ $\begin{cases} 1-p>0 \\ 3+p>0 \end{cases}$ $\Longleftrightarrow$ $-3 < p < 1$
- SEMPLICE STABILITÀ $\Longleftrightarrow$ $p=-3$ OPPURE $p=1$
- INSTABILITÀ $\Longleftrightarrow$ $p<-3$ OPPURE $p>1$

- IL PARAMETRO q NON INFLUENZA LA STABILITÀ.

1.3) Dopo aver posto $p = 0$, calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ tra $u(t)$ e $y(t)$. Determinare poi per quali valori del parametro q la risposta allo scalino del sistema presenta un fenomeno di sotto-elongazione.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \boxed{\frac{s+2-q}{s^2+s+3}}$$

- SOTTOELONGAZIONE SE LO ZERO È NEL SEMIPIANO DESTRO, OVVERO

$$-2+q > 0 \iff \boxed{q > 2}$$

1.4) Si supponga ora che il sistema possieda una terza variabile di stato che evolve nel tempo secondo la seguente equazione:

$$\dot{x}_3(t) = \sum_{i=1}^{3} x_i(t)$$

Motivando la risposta, dire se il sistema complessivo, per opportuni valori dei parametri p e q può risultare asintoticamente stabile.

- LA MATRICE DINAMICA DIVENTA:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \boxed{A} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 & 1 \end{matrix} & \boxed{1} \end{bmatrix}$$

$\mathrm{Re} > 0$

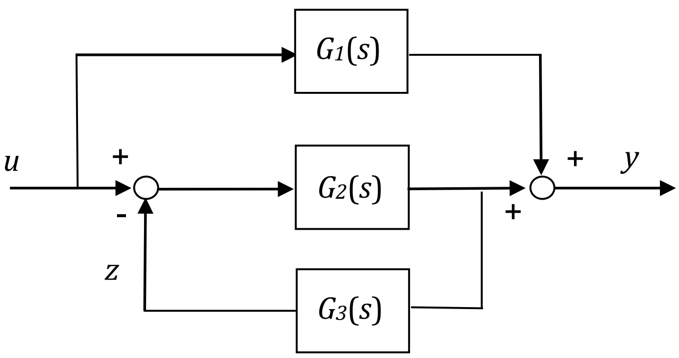
CHE È TRIANGOLARE A BLOCCHI.

- I SUOI AUTOVALORI SONO GLI AUTOVALORI DI A E 1

SIST. INSTABILE $\forall p, q$

ESERCIZIO 2

Si consideri il sistema descritto dal seguente schema a blocchi.



2.1) Calcolare la funzione di trasferimento tra $u(t)$ e $y(t)$.

$$G_{yu}(s) = G_1(s) + \frac{G_2(s)}{1 + G_2(s)G_3(s)}$$

2.2) Determinare il legame tra la trasformata di Laplace di $z(t)$ e quella di $u(t)$, quando $u(t) = \exp(-0.1t)$.

$$Z(s) = \frac{G_2(s)G_3(s)}{1 + G_2(s)G_3(s)} \cdot U(s)$$

$$U(s) = \frac{1}{s + 0.1}$$

2.3) Fornendo una spiegazione, dire quali delle seguenti condizioni sono necessarie perché il sistema complessivo sia asintoticamente stabile:

[a] il sottosistema descritto da $G_1(s)$ è asintoticamente stabile

[b] il sottosistema descritto da $G_2(s)$ è asintoticamente stabile

[c] tutti i sottosistemi $G_i(s), i = 1,2,3$, sono asintoticamente stabili

[d] gli zeri di $G_3(s)$ hanno tutti parte reale negativa

[e] i poli di $G_1(s)$ hanno tutti parte reale negativa

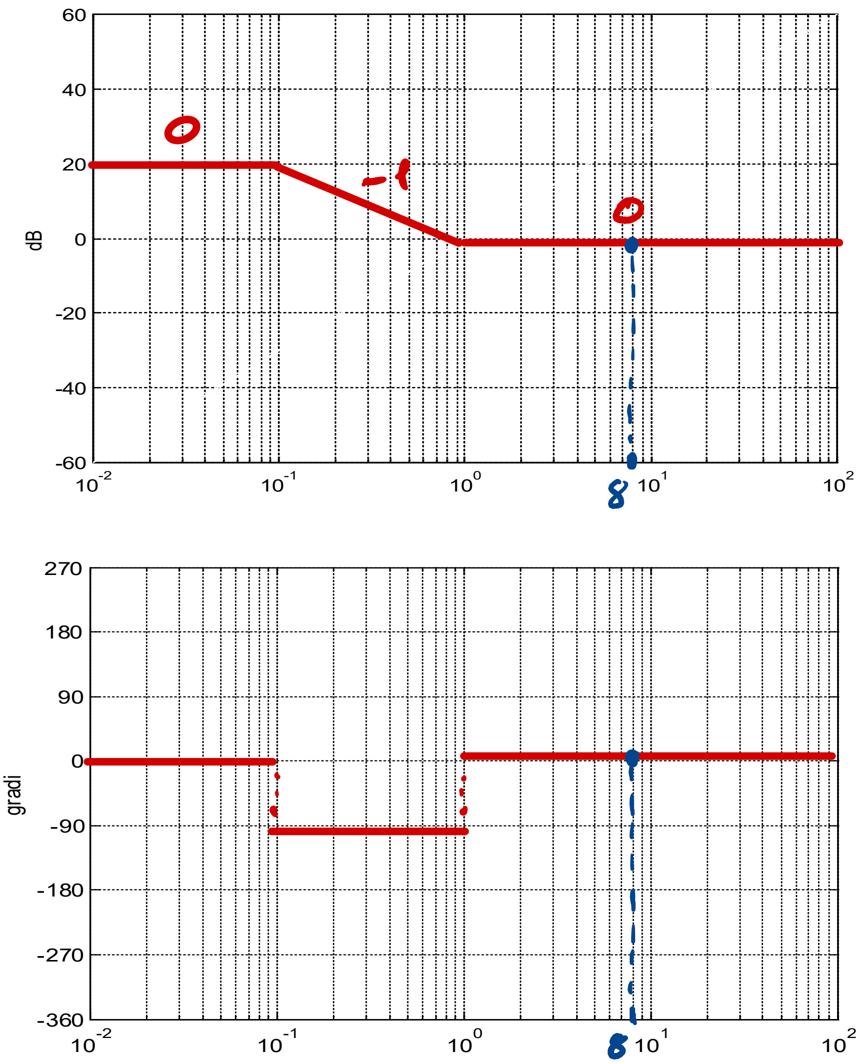
- ESSENDO $G_1(s)$ IN PARALLELO CON IL SISTEMA RETROAZIONATO, E` NECESSARIO CHE SIA ASINT. STABILE

ESERCIZIO 3

Si consideri un sistema a tempo continuo con ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$ e funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{10(1+s)}{(1+10s)}$$

3.1) Tracciare i diagrammi (asintotici) di Bode di modulo e fase associati a $G(s)$.



3.2) Calcolare la risposta $y(t)$ del sistema all'ingresso $u(t) = 0.5\ \mathrm{sca}(t)$. Verificare poi che i valori $y(0)$ e $y(\infty)$ di tale risposta sono coerenti con quelli ottenibili dai teoremi del valore iniziale e finale.

$$Y(s) = \frac{10(1+s)}{1+10s} \cdot \frac{0.5}{s} = \frac{0.5(s+1)}{s(s+0.1)} = \frac{\alpha}{s} + \frac{\beta}{s+0.1}$$

$$\begin{cases} \alpha = 5 \\ \beta = -4.5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{y(t) = 5 - 4.5e^{-0.1t}, \quad t \geq 0} \Rightarrow \begin{array}{l} y(0) = 0.5 \\ y(\infty) = 5 \end{array}$$

- VERIFICA

. TVI: $y(0) = \lim_{s \to \infty} sY(s) = 0.5$ ✓

. TVF: $y(\infty) = \lim_{s \to 0} sY(s) = 5$ ✓

3.3) Valutare l'amplificazione e lo sfasamento che il sistema applica, a transitorio esaurito, all'ingresso $u(t) = \mathrm{sen}(8t)$.

- AMPLIFICAZIONE:

$$|G(j8)| = 10 \frac{|1+j8|}{|1+j80|} = 10 \frac{\sqrt{65}}{\sqrt{6401}} \simeq \boxed{1}$$

- SFASAMENTO:

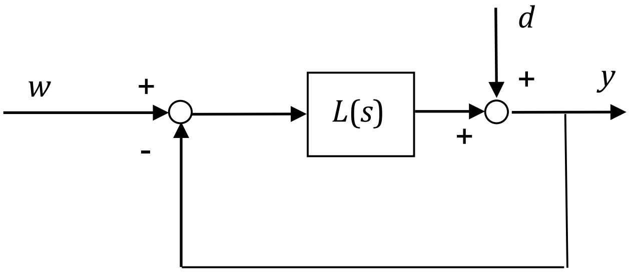
$$\angle G(j8) = \angle(1+j8) - \angle(1+j80) = \mathrm{arctg}\, 8 - \mathrm{arctg}\, 80 \simeq$$
$$\simeq -6^\circ \simeq \boxed{-0.1 \text{ rad}}$$

NOTA

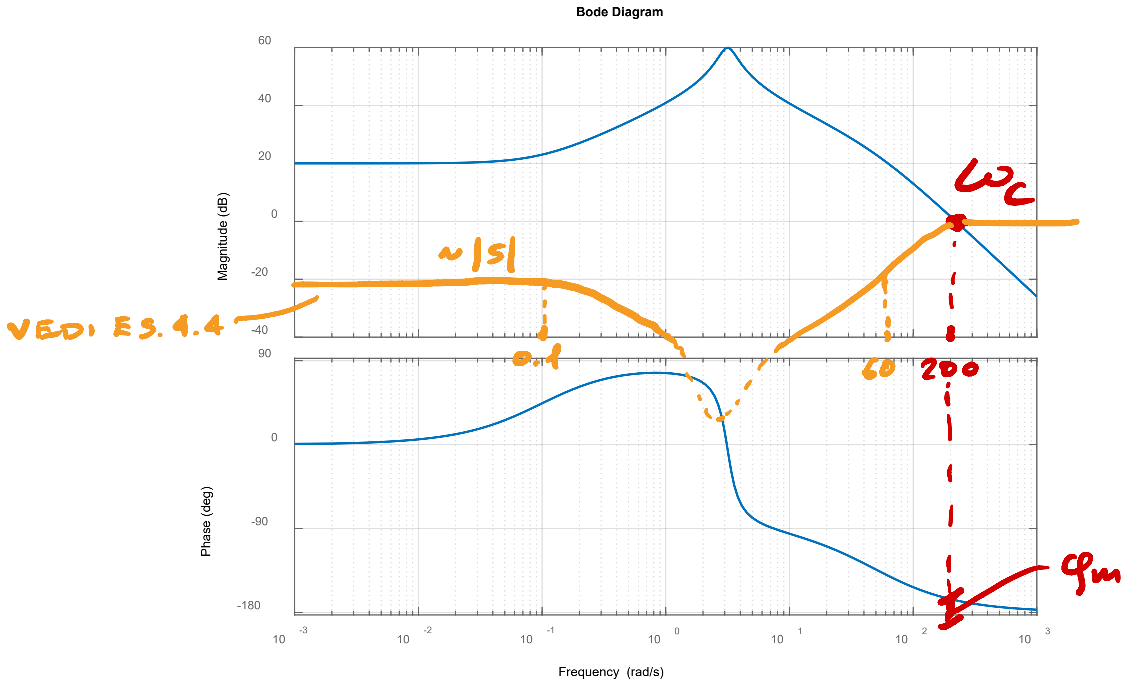
- ENTRAMBI I VALORI SONO COERENTI CON I DIAGRAMMI DI BODE

ESERCIZIO 4

Si consideri il sistema di controllo in anello chiuso mostrato in figura.



Quelli mostrati qua sotto sono i diagrammi di Bode associati alla funzione d'anello $L(s)$, che si suppone asintoticamente stabile.



4.1) Ricavare il segno e il valore assoluto dei guadagni della funzione d'anello $L(s)$ e della funzione di sensitività complementare $F(s)$.

$\mu_L = 10 > 0$ (MODULO 20dB, FASE 0°)

$$\mu_F = \frac{\mu_L}{1+\mu_L} = \frac{10}{11} > 0$$

4.2) Valutare dai diagrammi la pulsazione critica ω_c e il margine di fase φ_m .

$\boxed{\omega_c \simeq 200 \text{ rad/s}}$, $\varphi_c \simeq -170° \Rightarrow \boxed{\varphi_m \simeq 10°}$

4.3) Giudicare la stabilità del sistema di controllo e stimare il tempo di assestamento della risposta a uno scalino del riferimento.

$\begin{cases} P = 0 \quad (L(s) \text{ È AS. STAB.}) \\ \exists\, \omega_c \end{cases} \Rightarrow$ CRITERIO DI BODE APPLICABILE

$\left.\begin{matrix} \mu_L > 0 \\ \varphi_m > 0° \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ SIST. DI CONTROLLO AS. STABILE

$t_a \simeq \dfrac{5}{\xi\omega_n} \simeq \dfrac{500}{\varphi_m \omega_c} \simeq 0.25$

POLI IN A. CHIUSO

4.4) Discutere, al variare di ω , la capacità del sistema di attenuare l'effetto del disturbo $d(t) = \text{sen}(\omega t)$.

- LA FDT DA CONSIDERARE È $S(s) = \dfrac{1}{1+L(s)}$
- IL SUO D. DI BODE SI APPROSSIMA CON:

$-\lvert L(j\omega)\rvert_{dB}$	$\omega < \omega_c = 200$
0 dB	$\omega > \omega_c = 200$

- QUINDI, IL SISTEMA DI CONTROLLO RIESCE AD ATTENUARE $d(t)$ SOLO SE $\omega < 200$.
- PIÙ PRECISAMENTE, IL FATTORE DI ATTENUAZIONE È CIRCA:

-20 dB	$\omega \in [0, 0.1]$
< -20 dB	$\omega \in [0.1, 60]$ (CON MAX ATTENUAZIONE DI -60 dB IN $\omega \simeq 3$)
TRA -20 dB E 0 dB	$\omega \in [60, 200]$
0 dB	$\omega \in [200, \infty)$