ESERCIZIO 1

Si consideri il sistema dinamico a tempo continuo descritto dalle seguenti equazioni:

$$\dot{x}_1(t) = 6x_1(t) + 8x_2(t) + u_1(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = -8x_1(t) - 10x_2(t) + 2u_2(t)$$
$$y(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

1.1) Giudicare l'asintotica stabilità del sistema.

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ -8 & -10 \end{bmatrix}$$

$$\varphi(\lambda) = \det(\lambda I - A) = (s-6)(s+10) + 64 =$$
$$= s^2 + 4s + 4 = (s+2)^2$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = -2 < 0 \Longrightarrow$ AS. STABILITÀ

1.2) Dire se è possibile trovare valori costanti $\bar{u}_1 \neq 0$ e $\bar{u}_2 \neq 0$ delle variabili di ingresso per cui il sistema rimane in equilibrio con uscita nulla.

$$\begin{cases} 0 = 6x_1 + 8x_2 + u_1 \\ 0 = -8x_1 - 10x_2 + 2u_2 \\ 0 = x_1 + x_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 = 2x_2 + u_1 \\ 0 = -2x_2 + 2u_2 \\ 0 = x_1 + x_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_1 = -2x_2 \\ u_2 = x_2 \\ x_1 = -x_2 \end{cases} \Longrightarrow \boxed{\begin{matrix} \bar{u}_1 = -2\alpha \\ \bar{u}_2 = \alpha \end{matrix}, \quad \alpha \neq 0}, \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} -\alpha \\ \alpha \end{bmatrix}$$

1.3) Calcolare le due funzioni di trasferimento $G_1(s)$ e $G_2(s)$ che descrivono i legami tra le due variabili di ingresso e l'uscita.

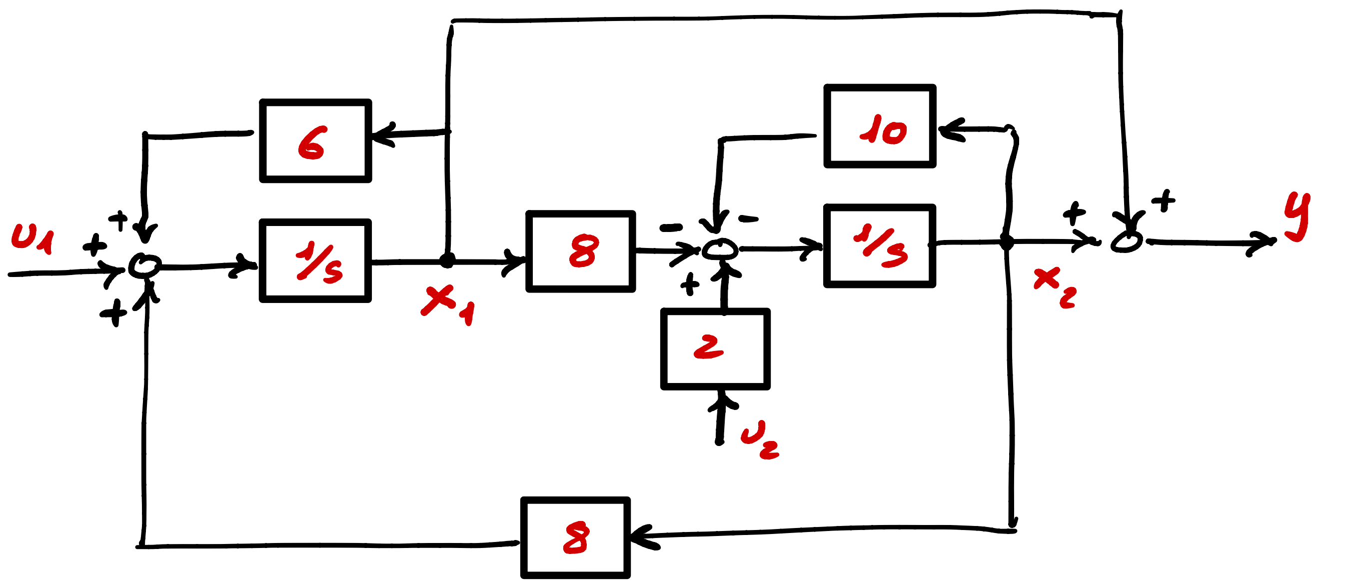
$$G_1(s) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s-6 & -8 \\ 8 & s+10 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{(s+2)^2} \begin{bmatrix} s+10 & 8 \\ -8 & s-6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{s+2}{(s+2)^2} = \frac{1}{s+2}$$

$$G_2(s) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s-6 & -8 \\ 8 & s+10 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{(s+2)^2} \begin{bmatrix} s+10 & 8 \\ -8 & s-6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{2(s+2)}{(s+2)^2} = \frac{2}{s+2}$$

1.4) Rappresentare il sistema con uno schema a blocchi espanso in cui compaiano esplicitamente entrambe le variabili di stato x_1 e x_2 .



ESERCIZIO 2

La trasformata di Laplace della risposta allo scalino unitario di un sistema lineare invariante a tempo continuo sia data da:

$$Y(s) = \frac{20(1+2s)}{s^2+4s}$$

2.1) Utilizzando i teoremi del valore iniziale e finale, calcolare $y(0)$, $\dot{y}(0)$ e $y(\infty)$ (se esiste finito).

$$y(0) = \lim_{s\to\infty} sY(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{20(1+2s)}{s+4} = 40$$

$$\dot{y}(0) = \lim_{s\to\infty} s\left(sY(s) - y(0)\right) = \dots = \lim_{s\to\infty} \frac{-140s}{s+4} = -140$$

$$y(\infty) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} \frac{20(1+2s)}{s+4} = 5$$

NOTA: T.V.F. APPLICABILE PERCHÈ I POLI VALGONO 0 E −4

2.2) Mediante lo sviluppo di Heaviside, ricavare l'andamento nel tempo della risposta allo scalino $y(t), t \geq 0$.

$$Y(s) = \frac{\alpha}{s} + \frac{\beta}{s+4}$$

$$\alpha(s+4) + \beta s = 20(1+2s)$$

$s=0 \quad 4\alpha = 20 \implies \alpha = 5$

$s=-4 \quad -4\beta = -140 \implies \beta = 35$

$$\boxed{y(t) = 5 + 35e^{-4t}, \quad t \geq 0}$$

2.3) Valutare il comportamento a regime dell'uscita $y(t)$ del sistema quando viene sollecitato dall'ingresso $u(t) = 2\text{sen}(t) - 10$.

$$G(s) = Y(s)/\tfrac{1}{s} = sY(s) = \frac{20(1+2s)}{s+4} \qquad \mu = G(0) = 5$$

$$|G(j1)| = \frac{20|1+j2|}{|4+j1|} = \frac{20\sqrt{5}}{\sqrt{17}} \simeq 10.85$$

$$\angle G(j1) = \text{arctg}(2) - \text{arctg}(1/4) \simeq 49^\circ = 0.86 \text{ rad}$$

$\implies$ A REGIME $\boxed{y(t) \simeq 21.7 \text{ sen}(t + 0.86) - 50}$

ESERCIZIO 3

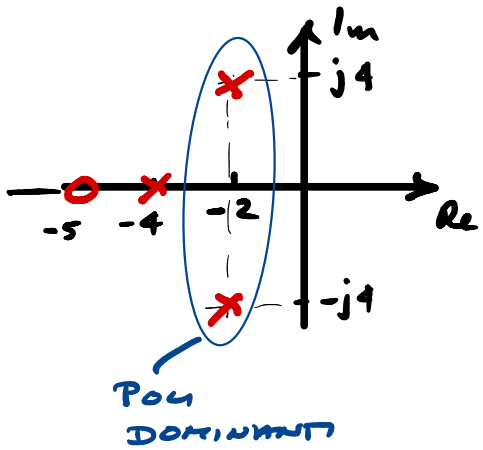
Si consideri un sistema a tempo continuo con ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$ e funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{100(s+5)}{(s^2+4s+20)(s+4)}$$

3.1) Valutare il tipo e il guadagno di $G(s)$ e disegnare nel piano complesso la posizione di poli e zeri.

$g = 0$, $\mu = G(0) = 6.25$

- POLI: -4
  $-2 \pm j4 \rightarrow \begin{cases} \omega_n = \sqrt{20} \simeq 4.47 \\ \xi = \frac{2}{\sqrt{20}} \simeq 0.45 \end{cases}$
- ZERO: -5



3.2) Determinare un'approssimazione a poli dominanti di $G(s)$.

$$\tilde{G}(s) = \frac{125}{s^2+4s+20}$$

3.3) Per il sistema in esame, valutare i seguenti parametri della risposta allo scalino: tempo di assestamento t_a; massima sovraelongazione relativa Δ; "periodo" delle oscillazioni P; numero di oscillazioni complete visibili nel transitorio.

$$t_a \simeq \frac{5}{\xi\omega_n} = \frac{5}{2} = 2.5$$

$$\Delta = \exp\left(-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}\right) \simeq 0.21$$

$$P = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{4} \simeq 1.57$$

$$N_{osc} = \frac{t_a}{P} \simeq \frac{2.5}{1.57} \simeq 1.6 \quad \text{(TRA 1 E 2)}$$

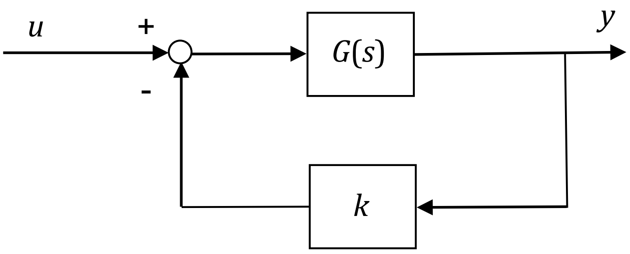
3.4) Dopo aver definito il tempo di salita t_s , dire, motivando la risposta, se esso può essere superiore a 4 unità di tempo.

t_s : TEMPO NECESSARIO PERCHÈ LA RISPOSTA ALLO SCALINO PASSI DAL 10% AL 90% DEL VALORE DI REGIME

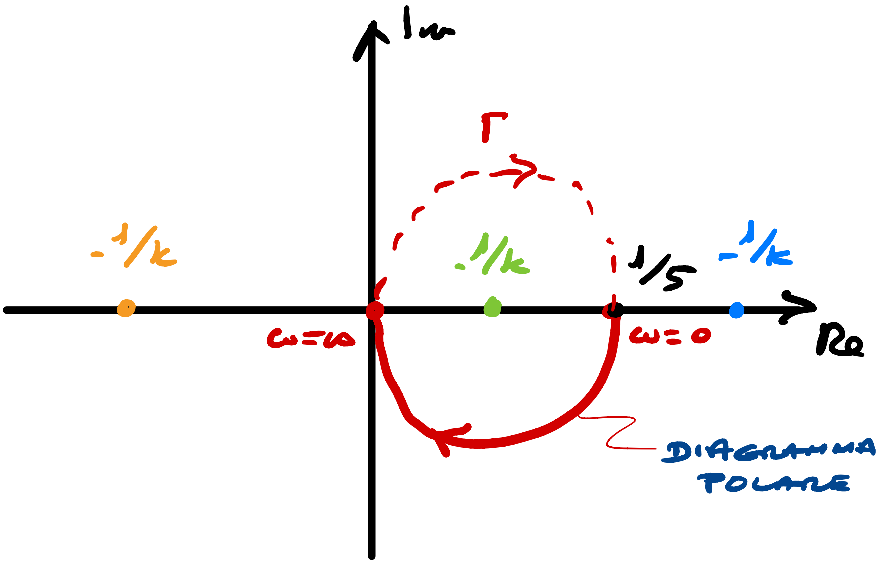
- DEVE RISULTARE $t_s < t_a$. POICHÈ $t_a \simeq 2.5$,
  t_s NON PUÒ ESSERE MAGGIORE DI 4.

ESERCIZIO 4

Si consideri il sistema in anello chiuso mostrato in figura, dove k è un parametro reale e $G(s) = \frac{2}{s+10}$.



4.1) Tracciare l'andamento qualitativo del diagramma polare associato a $G(s)$.



4.2) Mediante il criterio di Nyquist, discutere l'asintotica stabilità del sistema in anello chiuso al variare di k da $-\infty$ a $+\infty$.

N n° DI GIRI DI Γ INTORNO A $-\frac{1}{k}$ $\qquad$ $P=0$

$k>0$ $\quad$ $N=0=P \Rightarrow$ AS. STABILE

$k<-5$ $\quad$ $N=-1\neq P \Rightarrow$ INSTABILE

$k=-5$ $\quad$ N NON DEF. $\Rightarrow$ NON AS. STABILE

$-5<k<0$ $\quad$ $N=0=P \Rightarrow$ AS. STABILE

$k=0$ $\quad$ ANELLO APERTO $\Rightarrow$ AS. STABILE

- QUINDI:

AS. STABILE $\Leftrightarrow k>-5$

4.3) Dopo aver calcolato la funzione di trasferimento tra u e y , determinare quanto valgono i poli del sistema in anello chiuso in funzione di k . Verificare inoltre la coerenza del risultato con le conclusioni del punto precedente.

$$G_{yu}(s) = \frac{G(s)}{1+kG(s)} = \frac{2}{s+10+2k}$$

- POLO IN A.C. : $s = -10-2k$

AS. STAB. $\iff$ $-10-2k<0$ OVVERO $k>-5$

VERIFICA OK !