ESERCIZIO 1

Si consideri il seguente sistema a tempo discreto:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \qquad A = \begin{bmatrix} 2a & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$y(k) = Cx(k)$$

dove a è un parametro reale.

1.1) Discutere per quali valori di a il sistema è asintoticamente stabile.

1.2) Determinare a in modo che il tempo di assestamento del sistema sia $k_a < 15$.

1.3) Determinare a in modo che il sistema si comporti come un FIR. Spiegare poi quali sono le principali proprietà di un tale sistema.

1.4) Ponendo $a = 1/4$, calcolare i primi 5 valori ($y(0), y(1), \ldots, y(4)$) della risposta del sistema ad un impulso unitario a partire da stato iniziale nullo.

ESERCIZIO 2

2.1) Si spieghi in cosa consiste la tecnica di progetto di un controllore digitale basata sul metodo di Tustin.

2.2) Utilizzando il metodo di Tustin, si progetti il regolatore digitale "equivalente" a quello analogico descritto dalla funzione di trasferimento

$$R°(s) = \frac{9(1+5s)}{s(1+0.1s)}$$

supponendo che il periodo di campionamento sia pari a $T = 1$.

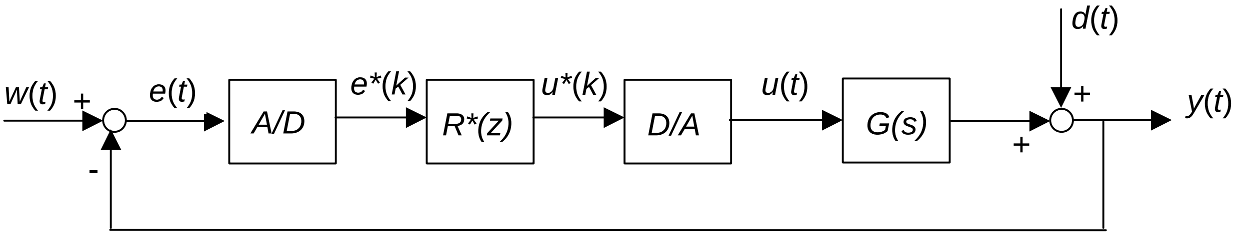
2.3) Calcolare poli e zeri della funzione di trasferimento del regolatore digitale progettato al punto precedente e discutere se tali valori cambierebbero se si usasse un diverso periodo di campionamento.

ESERCIZIO 3

Con riferimento all'esempio illustrato nell'esercitazione di laboratorio (controllo di posizione della testina di lettura di un DVD), spiegare che cos'è un "notch filter" (filtro a spillo) e a quale scopo è stato utilizzato nella specifica applicazione.

ESERCIZIO 4

Si consideri il sistema di controllo digitale descritto dal seguente schema a blocchi:



dove $G(s) = \dfrac{20}{1+s}$, $R^*(z) = \dfrac{0.4(z-0.5)}{z-1}$ e i due convertitori operano con lo stesso periodo $T = 0.25$.

4.1) Scrivere l'espressione nel dominio del tempo della legge di controllo realizzata dal controllore $R^*(z)$.

4.2) Usando gli strumenti dell'analisi a tempo discreto, verificare la stabilità del sistema di controllo. A tale scopo, si suggerisce di ricavare la descrizione a segnali campionati del sottosistema a tempo continuo.

4.3) Spiegare l'utilità del polo in $z = 1$ presente nel controllore dal punto vista delle prestazioni del sistema di controllo.

4.4) Supponendo che il disturbo $d(t)$ sia una sinusoide di pulsazione $w_d = 0.1\, rad/s$, valutare, anche in modo approssimato, l'attenuazione che subisce tale disturbo.

SOLUZIONE DELL'ESERCIZIO 1

1.1) Risulta

$$j(l) = \det(lI - A) = l^2\left(l + 1 - 2a\right)$$

e quindi due autovalori sono nulli. Perché il sistema sia asintoticamente stabile anche il terzo autovalore deve avere modulo minore di 1. Quindi deve essere

$$|2a - 1| < 1$$

ovvero

$$0 < a < 1$$

1.2) Il tempo di assestamento è approsimativamente dato da

$$k_a = \frac{-5}{\ln|2a - 1|}$$

Imponendo che sia $k_a < 15$, si ottiene

$$\frac{1 - e^{-1/3}}{2} < a < \frac{1 + e^{-1/3}}{2}$$

cioè circa

$$0.142 < a < 0.858$$

1.3) Per essere un FIR il sistema deve avere tutti i poli (autovalori) nell'origine. Quindi deve essere

$$a = 0.5$$

Un sistema FIR gode delle seguenti proprietà:

- la risposta all'impulso si annulla in tempo finito;
- la risposta allo scalino arriva a regime in tempo finito.

1.4) Si possono usare le equazioni del sistema nel dominio del tempo in modo iterativo, ottenendo

$$x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad x(1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad x(2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad x(3) = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \quad , \quad x(4) = \begin{bmatrix} -0.25 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

da cui

$$y(0) = 0 \quad , \quad y(1) = 0 \quad , \quad y(2) = 1 \quad , \quad y(3) = -1.5 \quad , \quad y(4) = 0.75$$

Allo stesso risultato si perviene effettuando la divisione tra numeratore e denominatore della funzione di trasferimento

$$G(z) = C(zI - A)^{-1}B = \frac{z - 1}{z^2(z + 0.5)} = z^{-2} - 1.5z^{-3} + 0.75z^{-4} + \ldots$$

SOLUZIONE DELL'ESERCIZIO 2

2.1) Si veda la teoria sui metodi di discretizzazione di un controllore analogico.

2.2) Utilizzando la trasformazione

$$s = 2\frac{z-1}{z+1}$$

si ricava

$$R^*(z) = \frac{9(11z-9)(z+1)}{2(z-1)(1.2z+0.8)} = 41.25\frac{(z-0.82)(z+1)}{(z-1)(z+0.67)}$$

2.3) I poli sono

$$z = 1 \quad , \quad z = -0.67$$

Gli zeri sono

$$z = -1 \quad , \quad z = 0.82$$

Se si cambiasse il periodo di campionamento si sposterebbero solo il polo in –0.67 e lo zero in 0.82. L'altro polo e l'altro zero invece non cambierebbero.

SOLUZIONE DELL'ESERCIZIO 3

Si veda il materiale sul sito web relativo alla seconda esercitazione di laboratorio.

SOLUZIONE DELL'ESERCIZIO 4

4.1) La legge di controllo è

$$u^*(k) = u^*(k-1) + 0.4e^*(k) - 0.2e^*(k-1)$$

4.2) Il sistema a segnali campionati costituito dal mantenitore, da $G(s)$ e dal campionatore è descritto dalla funzione di trasferimento

$$G^*(z) = 20\frac{1-e^{-T}}{z-e^{-T}} \cong \frac{4.4}{z-0.78}$$

La funzione d'anello a tempo discreto è quindi

$$L^*(z) = R^*(z)G^*(z) = \frac{1.76(z-0.5)}{(z-1)(z-0.78)} = \frac{N(z)}{D(z)}$$

Per studiare la stabilità del sistema retroazionato occorre verificare se le radici del polinomio $D(z)+N(z)$ hanno tutte modulo minore di 1. Si ottiene

$$D(z)+N(z) = z^2 - 0.02z - 0.1$$

le cui radici hanno in effetti modulo minore di 1. Dunque il sistema di controllo è asintoticamente stabile.

4.3) Il polo in $z=1$ è utile in generale per migliorare le prestazioni statiche, perché corrisponde ad un integratore discreto. In particolare garantisce l'annullamento dell'errore a transitorio esaurito in presenza di riferimenti a scalino.

4.4) Se il sistema di controllo fosse analogico (con funzione d'anello $L(s)$) il disturbo sarebbe attenuato di un fattore

$$\frac{1}{|1+L(jw_d)|} \cong \frac{1}{|L(jw_d)|}$$

dove l'approssimazione è valida se $|L(jw_d)| >> 1$.

Per ricondursi al caso analogico occorre approssimare il comportamento del regolatore digitale con una funzione di trasferimento a tempo continuo. Dalla teoria si sa che

$$\tilde{R}(s) \cong e^{-sT/2}R^*(e^{sT}) = e^{-sT/2}0.4\frac{e^{sT}-0.5}{e^{sT}-1}$$

Risulta allora

$$|\tilde{R}(jw_d)| = 0.4\frac{|e^{jw_dT}-0.5|}{|e^{jw_dT}-1|} = 0.4\frac{|\cos(0.025)+j\sin(0.025)-0.5|}{|\cos(0.025)+j\sin(0.025)-1|} \cong \frac{0.4\cdot 0.5}{0.025} = 8$$

Osservando che

$$|G(jw_d)| = \frac{20}{|1+j0.1|} \cong 20$$

risulta quindi

$$|\tilde{L}(jw_d)| = |\tilde{R}(jw_d)||G(jw_d)| \cong 160 \cong 44dB$$

In conclusione, il disturbo viene attenuato di un fattore circa pari a –44dB.