ESERCIZIO 1

Si supponga di campionare periodicamente, con periodo di campionamento $T = 1$, il segnale a tempo continuo

$$f(t) = e^{-t} - e^{-2t} \quad , \quad t \geq 0$$

e si denoti con $f^*(k)$ il segnale a tempo discreto risultante.

1.1) Si tracci il grafico qualitativo del segnale $f^*(k)$.

1.2) Si calcoli la trasformata Zeta $F^*(z)$ del segnale $f^*(k)$.

1.3) A partire da $F^*(z)$, utilizzando i teoremi del valore iniziale e finale e il metodo della divisione di polinomi, ricavare i valori di $f^*(0)$, $f^*(1)$ e $f^*(\infty)$.

1.4) Spiegare qual è il legame tra gli spettri di $f(t)$ e $f^*(k)$.

1.5) Verificare che lo spettro di $f(t)$ a pulsazione $\omega = 0$ non coincide esattamente con lo spettro di $f^*(k)$ a "pulsazione" $\vartheta = 0$. Spiegarne il motivo, anche alla luce della risposta data al punto 1.4.

ESERCIZIO 2

Si consideri il seguente sistema lineare a tempo discreto:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \qquad A = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 2 & \alpha \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$y(k) = Cx(k)$$

2.1) Determinare per quali valori del parametro α il sistema gode contemporaneamente delle seguenti proprietà:

(a) il sistema è asintoticamente stabile;

(b) la risposta allo scalino si assesta al valore di regime in un numero di passi inferiore a 10;

(c) in condizioni di equilibrio, l'uscita è almeno pari al doppio dell'ingresso.

2.2) Ponendo $\alpha = 0$, calcolare il movimento libero dell'uscita a partire da un generico stato iniziale x_0.

2.3) Sempre con $\alpha = 0$, dire se è possibile rendere il sistema un sistema FIR mediante la retroazione dall'uscita $u(k) = \beta_0 y(k)$ o mediante la retroazione dallo stato $u(k) = \beta_1 x_1(k) + \beta_2 x_2(k)$, con un'opportuna scelta dei parametri β_i.

ESERCIZIO 3

Si voglia determinare un regolatore digitale $R^*(z)$ "equivalente" a un regolatore analogico di riferimento, descritto dalla funzione di trasferimento $R°(s) = \frac{10}{s}$.

3.1) Progettare $R^*(z)$ con il metodo di *Eulero in avanti* per un generico valore del periodo di campionamento *T*.

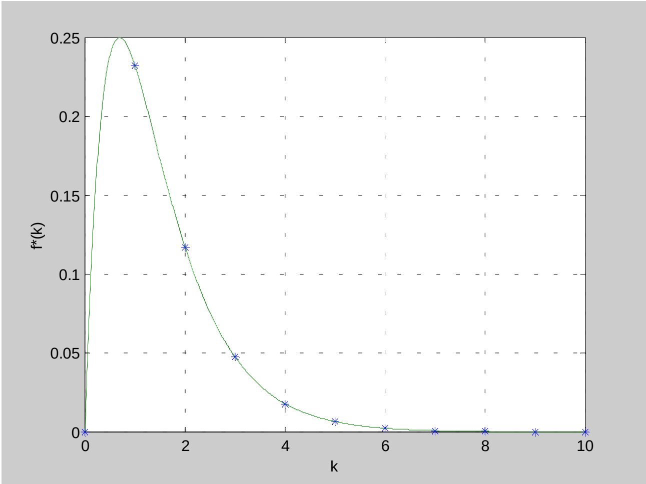
3.2) Ricavare la corrispondente legge di controllo nel dominio del tempo.

3.3) Calcolare la risposta in frequenza $R^*(e^{j\omega T})$ e mostrare che per $T \to 0$ essa coincide con $R°(j\omega)$.

3.4) Spiegare perché, quando si utilizzano tecniche di discretizzazione, nel progetto del regolatore analogico di riferimento è opportuno assicurare un'adeguata eccedenza di margine di fase.

SOLUZIONE DELL'ESERCIZIO 1

1.1) Il grafico del segnale $f^*(k)=e^{-k}-e^{-2k}$, $k\geq 0$ è mostrato in figura (asterischi blu).



1.2) La sua trasformata Zeta è

$$F^*(z)=\frac{z}{z-e^{-1}}-\frac{z}{z-e^{-2}}\cong\frac{0.23z}{(z-0.37)(z-0.14)}$$

1.3)

Teorema del valore iniziale: $f^*(0)=\lim_{z\to\infty}F^*(z)=0$

Teorema del valore finale (applicabile perché entrambi i poli hanno modulo minore di 1) :

$$f^*(\infty)=\lim_{z\to 1}(z-1)F^*(z)=0$$

Metodo della divisione di polinomi:

$$F^*(z)=0.23z^{-1}+\ldots \quad \Rightarrow \quad f^*(1)=0.23$$

Tutti questi valori sono coerenti con il grafico in figura.

1.4) Il legame tra gli spettri è descritto da

$$F^*(e^{j\omega T})=\frac{1}{T}\sum_{h=-\infty}^{\infty}F(j(\omega-h\omega_s)) \quad , \quad \omega_s=2\pi/T$$

Quindi lo spettro del segnale campionato è costituito dalla sovrapposizione di infinite repliche dello spettro originario spaziate tra di loro di 2π .

1.5) Lo spettro del segnale a tempo continuo è $F(j\omega)=\frac{1}{j\omega+1}-\frac{1}{j\omega+2}$, che in $\omega=0$ vale 0.5.

Quello del segnale campionato è $F^*(e^{j\vartheta})\cong\frac{0.23e^{j\vartheta}}{(e^{j\vartheta}-0.37)(e^{j\vartheta}-0.14)}$, che in $\vartheta=0$ vale circa 0.42.

La differenza è dovuta al fenomeno dell'aliasing, dato che il segnale $f(t)$ non è a banda limitata.

SOLUZIONE DELL'ESERCIZIO 2

2.1)

Per rispettare il vincolo (a), deve essere $|\alpha| < 1$.

Per rispettare il vincolo (b), deve essere $|\alpha| < e^{-1/2} \cong 0.6$.

Per rispettare il vincolo (c), il guadagno statico $\mu = C(I-A)^{-1}B = \dfrac{2}{0.9(1-\alpha)}$ deve essere maggiore o uguale a 2. Pertanto deve essere $\alpha \geq -1/9$.

In definitiva, per assicurare tutte e tre le proprietà contemporaneamente, deve risultare $-1/9 \leq \alpha < 0.6$.

2.2) Il movimento libero dello stato è

$$x_l(k) = A^k x_0 = \begin{cases} \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix} & , \quad k = 0 \\ \begin{bmatrix} 0.1^k \\ 2(0.1)^{k-1} \end{bmatrix} x_{10} & , \quad k > 0 \end{cases}$$

Quello dell'uscita è quindi

$$y_l(k) = Cx_l(k) = \begin{cases} x_{20} & , \quad k = 0 \\ 2(0.1)^{k-1} x_{10} & , \quad k > 0 \end{cases}$$

2.3) La funzione di trasferimento del sistema vale $G(z) = C(zI - A)^{-1}B = \dfrac{2}{z(z-0.1)}$.

Se si utilizza la retroazione (positiva) dall'uscita, il polinomio caratteristico in anello chiuso è

$$\varphi(z) = z^2 - 0.1z - 2\beta_0$$

Poiché non c'è modo di rendere nulle entrambe le radici, non è possibile ottenere un sistema FIR.

Se invece si adotta la retroazione dallo stato $u(k) = [\beta_1 \quad \beta_2]x(k) = Mx(k)$, la matrice dinamica in anello chiuso diventa $\hat{A} = A + BM = \begin{bmatrix} 0.1+\beta_1 & \beta_2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ e il suo polinomio caratteristico è

$$\varphi(z) = z^2 - z(0.1+\beta_1) + 2\beta_2$$

Ponendo $\beta_1 = -0.1$ e $\beta_2 = 0$, il sistema in anello chiuso è un FIR.

SOLUZIONE DELL'ESERCIZIO 3

3.1) Il regolatore digitale è descritto da $R^*(z) = \dfrac{10T}{z-1}$.

3.2) Di conseguenza, **l**a legge di controllo nel dominio del tempo è: $u^*(k) = u^*(k-1) + 10Te^*(k-1)$.

3.3) La risposta in frequenza $R^*(e^{j\omega T})$ è data da

$$R^*(e^{j\omega T}) = \frac{10T}{e^{j\omega T}-1} = \frac{10T}{\cos(\omega T) - 1 + j\mathrm{sen}(\omega T)}$$

Il limite di tale espressione per $T \to 0$ può essere ad esempio calcolato mediante la regola di De l'Hospital. Si ricava

$$\lim_{T\to 0} R^*(e^{j\omega T}) = \lim_{T\to 0} \frac{10}{-\omega\mathrm{sen}(\omega T) + j\omega\cos(\omega T)} = \frac{10}{j\omega} = R°(j\omega)$$

3.4) L'eccedenza di margine di fase è necessaria per tener conto dell'inevitabile perdita di fase dovuta alla presenza di campionatore e mantenitore (oltre eventualmente a quelle dovute al filtro anti-aliasing e all'offset di mantenimento). Approssimativamente tale diminuzione può essere valutata come quella associata a un ritardo di $T/2$.