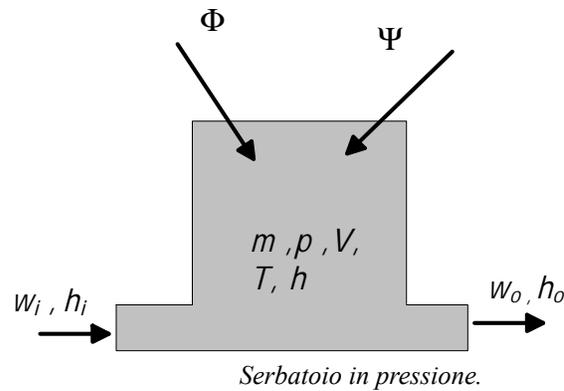


Capitolo 1

Circuiti pneumatici

In questo capitolo, a partire dalle equazioni di conservazione, si ricavano i modelli dei principali elementi che compongono i circuiti pneumatici.

1.1 Serbatoio



Si consideri il serbatoio mostrato nella Figura 1.1, il cui volume si può ritenere costante. L'equazione di conservazione della massa è quindi

$$\frac{dm}{dt} = \frac{dV\rho}{dt} = V \frac{d\rho}{dt} = w_i - w_o$$

Poiché dall'equazione dei gas perfetti $\rho = \frac{pP_m}{RT}$, si ha che

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{P_m}{R} \left(\frac{1}{T} \frac{dp}{dt} - \frac{p}{T^2} \frac{dT}{dt} \right)$$

Quindi, l'equazione di conservazione della massa può anche essere scritta nella forma

$$\frac{dp}{dt} = \frac{RT}{VP_m} \left(\frac{pVP_m}{RT^2} \frac{dT}{dt} + w_i - w_o \right)$$

Nel caso di trasformazioni isoterme ($dT = 0$), questa è un'equazione lineare

$$\frac{dp}{dt} = \frac{RT}{VP_m} (w_i - w_o)$$

Per altri tipi di espansioni o compressioni, una modellizzazione accurata richiede anche l'analisi della dinamica della temperatura, che può essere modellizzata tramite l'equazione

A. U. Thor

di bilancio dell'energia, che nella sua forma generale è

$$\frac{dE_t}{dt} = \Phi + \Psi + w_i \left(h_i + \frac{1}{2} u_i^2 + g z_i \right) - w_o \left(h_o + \frac{1}{2} u_o^2 + g z_o \right)$$

dove h_i e h_o sono l'entalpia entrante e uscente.

Anche in questo caso si può supporre che l'energia totale, definita come

$$E_t = m \left(e + \frac{1}{2} u^2 + g z \right)$$

sia prevalentemente dovuta all'energia interna e , per cui si può porre $E_t \simeq me$. Inoltre, si può assumere che l'entalpia del flusso uscente h_o coincida con quella del gas all'interno del serbatoio. Si ha quindi

$$\frac{dme}{dt} = m \frac{de}{dt} + e \frac{dm}{dt} = \Phi + \Psi + w_i \left(h_i + \frac{1}{2} u_i^2 + g z_i \right) - w_o \left(h + \frac{1}{2} u_o^2 + g z_o \right)$$

e, ricordando l'equazione di conservazione della massa,

$$m \frac{de}{dt} = \Phi + \Psi + w_i \left(h_i + \frac{1}{2} u_i^2 + g z_i - e \right) - w_o \left(h + \frac{1}{2} u_o^2 + g z_o - e \right)$$

Per l'ipotesi che l'energia cinetica e l'energia potenziale siano trascurabili, e osservando che $h = e + \frac{p}{\rho}$, la relazione precedente diventa

$$m \frac{de}{dt} = \Phi + \Psi + w_i (h_i - e) - w_o \frac{p}{\rho}$$

Poiché

$$\frac{p}{\rho} = \frac{RT}{P_m}$$

si ha

$$m \frac{de}{dt} = \Phi + \Psi + w_i (h_i - e) - w_o \frac{RT}{P_m}$$

Inoltre, si può anche assumere che l'energia interna dipenda quasi esclusivamente della temperatura.

$$\left. \frac{de}{dT} \right|_{V=\text{cost}} = c_v$$

per cui

$$\frac{de}{dt} = \frac{de}{dT} \frac{dT}{dt} = c_v \frac{dT}{dt}$$

e l'equazione dell'energia assume la forma

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{m c_v} \left\{ \Phi + \Psi + w_i (h_i - e) - w_o \frac{RT}{P_m} \right\}$$

Capitolo 1 Circuiti pneumatici

In questa relazione, se non ci sono apporti di lavoro dall'esterno $\Psi = 0$, mentre Φ , flusso di calore scambiato con il conduttore di calore esterno a temperatura T_{cond} , per esempio le pareti del contenitore, può essere modellizzato come

$$\Phi = kA_{scambio} (T_{cond} - T)$$

per cui

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{mc_v} \left\{ kA_{scambio} (T_{cond} - T) + w_i (h_i - c_v T) - w_o \frac{RT}{P_m} \right\}$$

In questa espressione, per chiudere il modello, va ancora posto $m = V\rho = \frac{VP_m p}{RT}$ ottenendo così

$$\frac{dT}{dt} = \frac{RT}{VP_m p c_v} \left\{ kA_{scambio} (T_{cond} - T) + w_i (h_i - c_v T) - w_o \frac{RT}{P_m} \right\}$$

1.2 Ugello

Per derivare il modello matematico, si ricordi che nella derivazione dell'equazione di Bernoulli in condizioni stazionarie e in assenza di attriti ($\alpha = 0$), vale la relazione

$$v \frac{dp}{dx} + \frac{1}{2} \frac{du^2}{dx} + g \frac{dz}{dx} = 0$$

o anche

$$v dp + \frac{1}{2} du^2 + g dz = 0$$

Poiché nel caso dell'ugello si può porre $dz = 0$, e ricordando che l'equazione della politropica $p = k\rho^n$ si può scrivere come

$$pv^n = b^n \quad , \quad b = k^{1/n}$$

o anche

$$v = bp^{-1/n}$$

dall'equazione di Bernoulli si ha

$$bp^{-1/n} dp + \frac{1}{2} du^2 = 0$$

che integrata tra la sezione di ingresso e quella di uscita diventa

$$\begin{aligned} u_o^2 - u_i^2 &= -2b \left[\frac{p^{1-1/n}}{1 - \frac{1}{n}} \right]_{p_i}^{p_o} \\ &= -2b \frac{n}{n-1} \left(p_o^{1-1/n} - p_i^{1-1/n} \right) \end{aligned}$$

A. U. Thor

ma, poiché $b = v_i p_i^{1/n}$,

$$\begin{aligned} u_o^2 - u_i^2 &= -2 \frac{n}{n-1} v_i p_i^{1/n} \left(p_o^{1-1/n} - p_i^{1-1/n} \right) \\ &= 2 \frac{n}{n-1} v_i p_i \left(1 - \left(\frac{p_o}{p_i} \right)^{\frac{n-1}{n}} \right) \end{aligned}$$

Se poi si ipotizza, come di consueto, $u_i \simeq 0$,

$$u_o = \sqrt{2 \frac{n}{n-1} v_i p_i \left(1 - \left(\frac{p_o}{p_i} \right)^{\frac{n-1}{n}} \right)}$$

Ora, poiché $w_i = w_o = \frac{A_o u_o}{v_o}$, e dall'equazione della politropica $v_o = v_i \left(\frac{p_i}{p_o} \right)^{1/n}$, risulta

$$\begin{aligned} w_o &= \frac{A_o u_o}{v_i} \left(\frac{p_o}{p_i} \right)^{1/n} \\ &= \frac{A_o}{v_i} \left(\frac{p_o}{p_i} \right)^{1/n} \sqrt{2 \frac{n}{n-1} v_i p_i \left(1 - \left(\frac{p_o}{p_i} \right)^{\frac{n-1}{n}} \right)} \\ &= A_o \sqrt{2 \frac{n}{n-1} \frac{p_i}{v_i} \left(\frac{p_o}{p_i} \right)^{2/n} \left(1 - \left(\frac{p_o}{p_i} \right)^{\frac{n-1}{n}} \right)} \end{aligned}$$

Al diminuire della pressione p_o , aumenta la velocità fino al valore limite della velocità del suono u_c , che per una generica espansione o compressione politropica è definita come

$$u_c^2 = \frac{dp}{d\rho}$$

Nel caso dell'ugello, si può ritenere che la trasformazione sia adiabatica, e quindi $n = \gamma$. Per trovare il rapporto critico tra la pressione di uscita e la pressione di ingresso $\frac{p_o}{p_i}$ per cui in corrispondenza della strozzatura dell'ugello si ha flusso sonico, o "choked flow", osserviamo che dall'equazione della politropica risulta

$$\frac{dp}{d\rho} = n \frac{p}{\rho} = npv$$

Detta allora p_c la pressione critica e v_c il volume specifico critico, poniamo $p_c = p_o$ e $v_c = v_o$ nell'equazione della velocità

$$u_c = \sqrt{\gamma p_c v_c} = \sqrt{2 \frac{\gamma}{\gamma-1} v_i p_i \left(1 - \left(\frac{p_c}{p_i} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right)}$$

Capitolo 1 Circuiti pneumatici

da cui

$$\frac{2}{\gamma - 1} \frac{p_i}{p_c} \frac{v_i}{v_c} \left(1 - \left(\frac{p_c}{p_i} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right) = 1$$

Dall'equazione della politropica si ha $\frac{v_i}{v_c} = \left(\frac{p_c}{p_i} \right)^{1/\gamma}$ che, sostituita nella relazione precedente, con semplici passaggi consente di ottenere il rapporto critico

$$\bar{p} = \frac{p_c}{p_i} = \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

Per esempio, quando il fluido è aria ($\gamma = 1.4$), il rapporto critico è $\bar{p} = 0.5283$, al di sotto del quale si ha flusso sonico.

Dalla relazione precedente si possono anche ricavare il rapporto critico tra i volumi specifici

$$\frac{v_c}{v_i} = \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{1}{1-\gamma}}$$

la velocità critica in funzione delle condizioni nella sezione d'ingresso

$$u_c = \sqrt{p_i v_i \frac{2\gamma}{\gamma + 1}}$$

e la portata critica $w_c = \frac{A_o u_c}{v_c}$ data da

$$w_c = A_o \sqrt{\gamma \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \frac{p_i}{v_i}}$$

In sintesi, l'ugello è descritto da due differenti modelli, uno valido per condizioni subsoniche quando $\frac{p_o}{p_i} < \bar{p}$, l'altro per condizioni soniche quando $\frac{p_o}{p_i} \geq \bar{p}$. Questi modelli sono riassunti nelle equazioni seguenti

$$\begin{aligned} w_o &= A_o \sqrt{2 \frac{n}{n-1} \frac{p_i}{v_i} \left(\frac{p_o}{p_i} \right)^{2/n} \left(1 - \left(\frac{p_o}{p_i} \right)^{\frac{n-1}{n}} \right)} & \frac{p_o}{p_i} > \bar{p} \\ w_o &= A_o \sqrt{\gamma \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \frac{p_i}{v_i}} & \frac{p_o}{p_i} \leq \bar{p} \end{aligned}$$

1.3 Valvola

Come nel caso dei processi idraulici, si può utilizzare l'equazione dell'ugello per descrivere il tratto convergente. La trasformazione può essere considerata adiabatica ($n = \gamma$) e in condizioni subsoniche risulta

$$w = A_{st} \sqrt{2 \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_i}{v_i} \left(\frac{p_{st}}{p_i} \right)^{2/\gamma} \left(1 - \left(\frac{p_{st}}{p_i} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right)}$$

A. U. Thor

che può anche essere scritta come

$$w = A_{st} Y \left(\frac{p_{st}}{p_i} \right) \sqrt{2\rho_i (p_i - p_{st})}$$

dove il fattore di espansione Y è definito da

$$Y \left(\frac{p_{st}}{p_i} \right) = \sqrt{\frac{\gamma \left(\frac{p_{st}}{p_i} \right)^{2/\gamma} - \left(\frac{p_{st}}{p_i} \right)^{(\gamma+1)/\gamma}}{\gamma - 1 \left(1 - \frac{p_{st}}{p_i} \right)}}$$

L'analisi dell'andamento del fattore di espansione in funzione del rapporto $\frac{p_{st}}{p_i}$ mostra che per $\frac{p_{st}}{p_i}$ prossimi a 1 si ha $Y \simeq 1$. In questa ipotesi, e definendo ancora il coefficiente di recupero

$$C_r = \sqrt{\frac{p_i - p_o}{p_i - p_{st}}}$$

l'equazione della portata assume ancora la forma

$$\begin{aligned} w &= \sqrt{2} \frac{A_{st}}{C_r} \sqrt{\rho_i (p_i - p_o)} \\ &= C_v \sqrt{\rho_i (p_i - p_o)} \end{aligned}$$

Naturalmente, come nel caso delle valvole per circuiti idraulici, se necessario si può esprimere l'area della strozzatura in funzione della posizione dello stelo della valvola, per consentire un'azione regolante.

1.4 Condotta

Si supponga di considerare una condotta cilindrica con sezione A e livello z costanti. Sotto queste ipotesi le equazioni di conservazione della massa e della quantità di moto sono

$$A \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial \rho A u^2}{\partial x} + A \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{2} C_f \rho u |u| \pi D + \rho A g \frac{dz}{dx} = 0$$

Ricordando la definizione di velocità critica, si ha che

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{u_c^2} \frac{\partial p}{\partial t}$$

per cui l'equazione di conservazione della massa si può anche scrivere come

$$\frac{A}{u_c^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

Si osservi poi che risulta

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho A u^2}{\partial x} &= \frac{\partial \left(\frac{w^2}{\rho A} \right)}{\partial x} = \frac{2w}{\rho A} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{w^2}{A} \frac{\partial \left(\frac{1}{\rho} \right)}{\partial x} \\ &= \frac{2w}{\rho A} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{w^2}{A} \frac{\partial \left(\frac{1}{\rho} \right)}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{2w}{\rho A} \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{w^2}{\rho^2 A} \frac{\partial \rho}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x} \\ &= \frac{2w}{\rho A} \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{w^2}{\rho^2 A u_c^2} \frac{\partial p}{\partial x} \end{aligned}$$

Quindi, poiché $\pi D = \frac{4A}{D}$, l'equazione della quantità di moto può essere scritta nella forma seguente

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{2w}{\rho A} \frac{\partial w}{\partial x} + \left(A - \frac{w^2}{\rho^2 A u_c^2} \right) \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{2C_f w |w|}{\rho D A} + \rho A g \frac{dz}{dx} = 0$$

1.5 Compressore

Anche i compressori, come le pompe, hanno lo scopo di aumentare la pressione di un gas che fluisce. Supponendo che la compressione avvenga in condizioni adiabatiche, quindi per ipotesi $\phi = 0$, le equazioni di conservazione della massa e dell'energia in condizioni stazionarie diventano

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dx} &= 0 \\ \frac{dw \left(h + \frac{1}{2}u^2 + gz \right)}{dx} &= \psi \end{aligned}$$

o anche

$$dh + d \left(\frac{1}{2}u^2 \right) + gdz = \frac{\psi dx}{w}$$

In questa relazione il termine $\frac{\psi dx}{w}$ è il lavoro dl estratto per unità di massa fluente, e si può supporre $d \left(\frac{1}{2}u^2 \right) = gdz = 0$. Risulta quindi

$$dl = dh$$

Il lavoro specifico compiuto sul gas tra la sezione di ingresso e quella di uscita è quindi

$$l = h_0 - h_i$$

Nell'insieme di temperature di interesse, si può anche supporre che il gas abbia calore specifico costante, quindi ricordando che $dh = c_p dT$, si ha

$$l = c_p (T_o - T_i) = c_p T_i \left(\frac{T_o}{T_i} - 1 \right)$$

A. U. Thor

D'altra parte, dall'equazione di stato dei gas perfetti e dall'equazione della politropica segue che

$$\frac{T_o}{T_i} = \frac{p_o \rho_i}{p_i \rho_o} = \frac{p_o}{p_i} \left(\frac{p_o}{p_i} \right)^{-1/\gamma} = \left(\frac{p_o}{p_i} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

per cui

$$l = c_p T_i \left(\left(\frac{p_o}{p_i} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right)$$

che rappresenta il lavoro specifico di compressione da p_i a p_o .

In pratica, per tener conto della non idealità della trasformazione, è necessario introdurre un'efficienza

$$\eta_c = \frac{h_{adiab} - h_i}{h_o - h_i} < 1$$

e il lavoro specifico effettivamente richiesto è

$$l_{eff} = \frac{1}{\eta_c} c_p T_i \left(\left(\frac{p_o}{p_i} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right)$$

Corrispondentemente, la potenza richiesta per effettuare la trasformazione di compressione è

$$P_s = \frac{w}{\eta_c} c_p T_i \left(\left(\frac{p_o}{p_i} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right)$$

dove, come nel caso della pompa, la portata w si determina da mappe statiche in funzione di $\frac{p_o}{p_i}$ e del numero di giri ω a cui opera il compressore.