

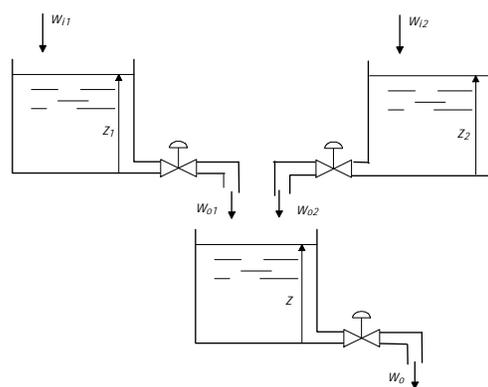




# Capitolo 1

## Controllo di rapporto

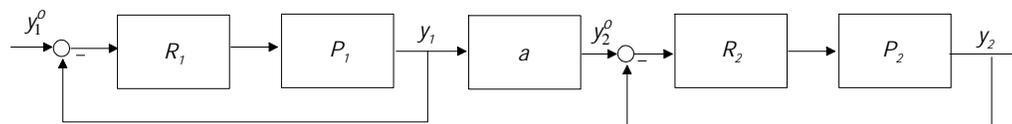
In questo capitolo si tratta il problema, frequente nel controllo dei processi, di mantenere un certo rapporto tra due variabili controllate. Con riferimento all'esempio riportato nella Figura 1, si supponga di dover mantenere costante il rapporto tra due portate  $w_{o1}$  e  $w_{o2}$  di ingresso al serbatoio di raccolta, e che queste portate siano a loro volta l'uscita dei due serbatoi a monte. I livelli  $z_1$  e  $z_2$  di questi ultimi sono regolati agendo sulle valvole poste all'emissione, mentre le portate di uscita  $w_{o1}$  e  $w_{o2}$  sono regolate agendo sulle rispettive portate d'ingresso  $w_{i1}$  e  $w_{i2}$ . Nel seguito, per semplicità si supporrà di poter manipolare direttamente queste portate, trascurando così le caratteristiche delle pompe di attuazione.



Processo.

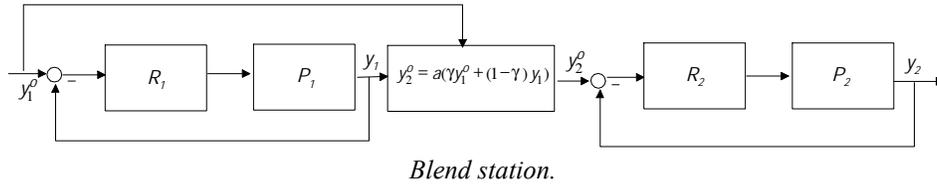
### 1.1 Schemi per il controllo di rapporto

Per considerare più in generale il problema del controllo di rapporto, dati due processi  $P_1$  e  $P_2$ , si supponga di volerli regolare in modo che le loro uscite  $y_1$  e  $y_2$  siano in un dato rapporto di proporzionalità, cioè  $\frac{y_2}{y_1} = a$ . Nell'ipotesi che le caratteristiche dinamiche dei processi in esame siano tali per cui l'anello di regolazione di  $P_2$  possa essere reso più rapido dell'anello di regolazione di  $P_1$ , lo schema usualmente adottato è quello riportato nella Figura 1.1, in cui il regolatore  $R_2$  deve avere un'azione integrale.



*Schema per il controllo di rapporto.*

In alternativa, per fare in modo che il riferimento del secondo anello dipenda più direttamente da quello del primo, cioè per introdurre un'azione di anticipo, è possibile usare lo schema mostrato nella Figura 1.1, detto *blend station*, in cui il parametro  $\gamma$  è da tarare opportunamente. Una scelta consigliata consiste nel porre  $\gamma = \frac{T_2}{T_1}$ , dove  $T_1$  e  $T_2$  sono delle stime delle costanti di tempo dominanti dei due anelli.



## 1.2 Modello del sistema

Tornando all'esempio iniziale, si ipotizzi per semplicità che i serbatoi siano uguali, così come le densità dei fluidi in ingresso. Si è mostrato in precedenza che, supponendo  $\eta(x) = x$  e posto  $\varphi = kA_v\sqrt{g\rho}$ , il modello dei serbatoi e delle portate di uscita è

$$\begin{aligned} \rho A \frac{dz_i(t)}{dt} &= w_{i_i}(t) - \varphi x_i(t) \sqrt{z_i(t)} \\ w_{o_i}(t) &= \varphi x_i(t) \sqrt{z_i(t)} \end{aligned}$$

dove il pedice  $i = 1, 2$  fa riferimento ai due serbatoi a monte.

Il corrispondente modello linearizzato, in corrispondenza dell'equilibrio dato da  $w_{i_i} = \bar{w}_{i_i}$  e  $x_i(t) = \bar{x}_i$ , è

$$\begin{aligned} \delta z_i(t) &= \frac{1}{\rho A} \left( \delta w_{i_i}(t) - \frac{\varphi \bar{x}_i}{2\sqrt{\bar{z}_i}} \delta z_i(t) - \varphi \sqrt{\bar{z}_i} \delta x_i(t) \right) \\ \delta w_{o_i}(t) &= \frac{\varphi \bar{x}_i}{2\sqrt{\bar{z}_i}} \delta z_i(t) + \varphi \sqrt{\bar{z}_i} \delta x_i(t) \end{aligned}$$

Si ponga ora

$$\tau_i = \frac{2\rho A\sqrt{\bar{z}_i}}{\varphi \bar{x}_i}, \quad a_i = \frac{2\bar{z}_i}{\bar{x}_i}, \quad b_i = \frac{2\sqrt{\bar{z}_i}}{\varphi \bar{x}_i}$$

con semplici passaggi si ha che, nella trasformata di Laplace, il modello linearizzato è descritto da

$$\begin{aligned} Z_i(s) &= \frac{b_i}{1 + \tau_i s} W_{i_i}(s) - \frac{a_i}{1 + \tau_i s} X_i(s) \\ W_{o_i}(s) &= \frac{1}{b_i} Z_i(s) + \frac{a_i}{b_i} X_i(s) \end{aligned}$$

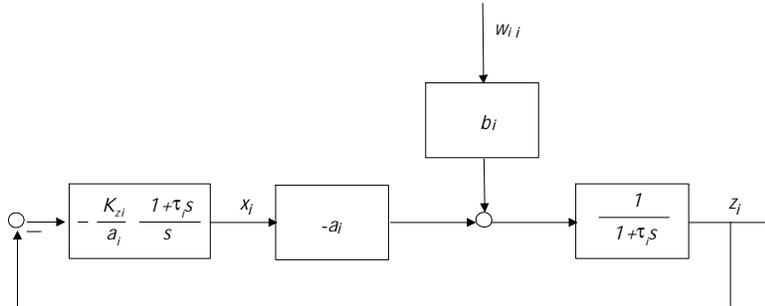


Figura 1: *Controllo di livello dei serbatoi.*

### 1.3 Controllo di rapporto

Per realizzare lo schema di controllo complessivo, si progettino dapprima due regolatori per il controllo dei livelli  $z_i$ ,  $i = 1, 2$ , agendo sull'apertura delle rispettive valvole  $x_i$ . Questi regolatori, come già discusso, possono essere due *PI* con funzione di trasferimento

$$R_{z_i}(s) = -\frac{K_{z_i}}{a_i} \frac{1 + \tau_i s}{s}$$

in corrispondenza dei quali le funzioni d'anello sono

$$L_{z_i}(s) = \frac{K_{z_i}}{s}$$

Per ognuna di esse, il margine di fase è di  $90^\circ$  e la pulsazione critica è pari a  $K_{z_i}$ , cioè, almeno in teoria, grande a piacere.

Con questo regolatore inserito, per ognuno dei due serbatoi a monte si ha lo schema a blocchi riportato nella Figura 1

Posto il riferimento di  $z_i$  uguale a zero, in quanto ininfluenza negli sviluppi seguenti, dallo schema della Figura 1 con semplici passaggi risulta

$$Z_i(s) = \frac{(b_i/K_{z_i})s}{\left(1 + \frac{1}{K_{z_i}}s\right)(1 + \tau_i s)} W_{i_i}(s)$$

$$X_i(s) = \frac{b_i}{a_i} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{K_{z_i}}s\right)} W_{i_i}(s)$$

Infine, sostituendo queste espressioni in quella di  $W_{o_i}(s)$ , si ha

$$W_{o_i}(s) = \frac{1 + \left(\tau_i + \frac{1}{K_{z_i}}\right)s}{\left(1 + \frac{1}{K_{z_i}}s\right)(1 + \tau_i s)} W_{i_i}(s)$$

Si osservi che, poiché è possibile imporre  $\frac{1}{K_{z_i}} \ll \tau_i$ , si ha una quasi cancellazione di polo e zero e la funzione di trasferimento è approssimativamente quella di un sistema del primo ordine con guadagno unitario e costante di tempo  $\frac{1}{K_{z_i}}$ , per il cui controllo può essere impiegato un regolatore integrale

$$R_{w_i}(s) = \frac{K_{w_i}}{s}$$

#### 1.4 Dati e risultati di simulazione

Si considerino ora i seguenti dati, validi per ognuno dei due serbatoi:  $A = 1m^2$ ,  $A_v = 0.00035m^2$ ,  $k = 4$ ,  $\rho = 1000Kg/m^3$  e gli ingressi nominali  $\bar{x}_i = 0.5$ ,  $\bar{w}_{i_i} = 2.5Kg/s$ . In corrispondenza si hanno i due livelli di equilibrio  $\bar{z}_i = 1.3m$ .

I modelli linearizzati attorno a questi stati di equilibrio sono

$$Z_i(s) = \frac{-5.2}{1 + 1041s} X_i(s) + \frac{1.04}{1 + 1041s} W_{i_i}(s)$$

e, per quanto precedentemente discusso, i due  $PI$  per il controllo di livello hanno funzione di trasferimento

$$R_{z_i}(s) = \frac{K_{z_i}}{\tau_i} \frac{1 + \tau_i s}{s}, \quad \tau_i = 1041, \quad K_{z_i} = -40$$

Per quanto riguarda invece i due regolatori di tipo integrale per il controllo della portata, la loro funzione di trasferimento è

$$R_{w_i}(s) = \frac{K_{w_i}}{s}, \quad K_{w_i} = 0.1$$

Si supponga poi che debba valere la relazione

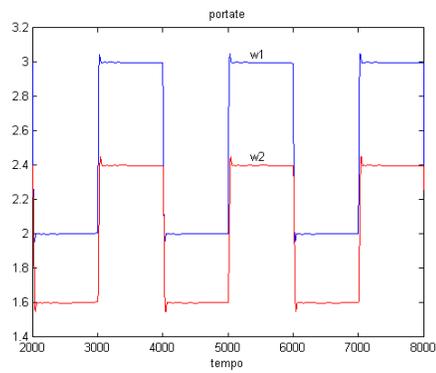
$$w_2(t) = 0.8w_1(t)$$

e si utilizzi lo schema di controllo di rapporto presentato nella Figura 1 schema presentato. Gli andamenti delle due portate e dei due livelli, a fronte di variazioni a scalino della richiesta di portata del serbatoio di raccolta, e l'andamento dell'errore  $e(t) = w_2(t) - 0.8w_1(t)$  sono riportati nelle Figure 1.4, 1.4, 1.4. Si osservi che il controllo di livello dei due serbatoi a monte è, per il progetto effettuato, molto più lento di quello di portata.

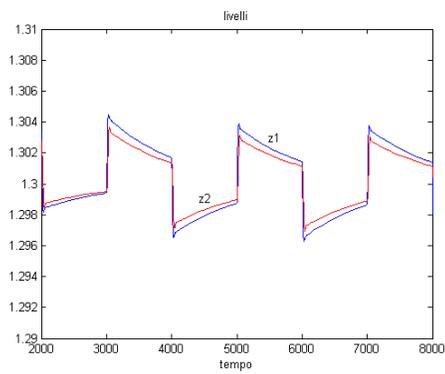
Si noti infine che, nel caso in esame, i due processi  $P_1$  e  $P_2$  hanno esattamente la stessa dinamica, contrariamente a quanto ipotizzato nella discussione relativa allo schema impiegato.

## Capitolo 1 Controllo di rapporto

Per questo motivo, l'errore in condizioni transitorie è difficilmente eliminabile. Prove effettuate con lo schema corrispondente alla blend station hanno fornito risultati analoghi, se non peggiori.

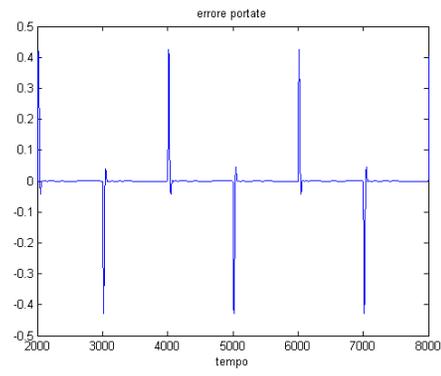


*Portate in uscita dai due serbatoi.*



A. U. Thor

*Livello dei due serbatoi (set point = 1.3).*



*Errore di rapporto di portata.*