





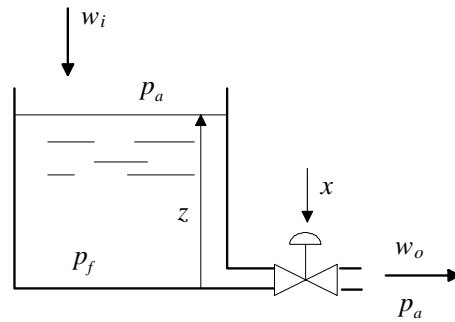
# Capitolo 1

## Controllo del livello di un serbatoio

In questo capitolo si considera il problema del controllo del livello di un serbatoio agendo sulla portata di uscita, mediante una valvola di efflusso, o sulla portata di ingresso per mezzo di una pompa. Si analizzano diversi possibili schemi di controllo, considerando anche esplicitamente la presenza di eventuali saturazioni degli attuatori.

### 1.1 Controllo del livello mediante valvola di efflusso

Si consideri il sistema riportato nella Figura 1.1, per il quale si vuole progettare un sistema di controllo del livello  $z$  agendo sulla posizione  $x$  dello stelo della valvola di efflusso.



*Serbatoio e valvola di efflusso.*

#### 1.1.1 Modello del sistema

L'equazione del serbatoio è

$$\rho A \frac{dz(t)}{dt} = w_i(t) - w_o(t)$$

mentre la valvola è descritta da

$$w_o(t) = kA_v \eta(x(t)) \sqrt{\rho(p_f(t) - p_a(t))} = kA_v \eta(x(t)) \sqrt{\rho^2 g z(t)}$$

Il modello completo del sistema idraulico è quindi

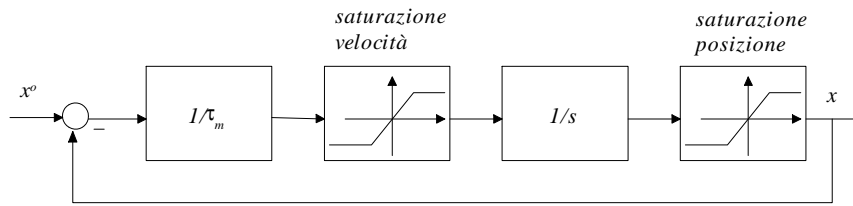
$$\frac{dz(t)}{dt} = \frac{w_i(t)}{\rho A} - \frac{kA_v \eta(x(t)) \sqrt{g}}{A} \sqrt{z(t)}$$

La regolazione del livello può essere effettuata agendo sullo stelo della valvola per mezzo di un motore elettrico. Se si trascura la costante di tempo elettrica, il motore può essere rappresentato da un sistema dinamico del primo ordine con costante di tempo meccanica  $\tau_m$

dell'ordine di  $2 \div 20s$ . Definendo con  $x^o$  il comando al servomotore, il modello lineare della valvola è quindi

$$\dot{x}(t) = \frac{1}{\tau_m} (x^o(t) - x(t))$$

Nel progetto e nella simulazione del sistema di controllo non è comunque opportuno trascurare il fatto che il movimento dello stelo è soggetto a saturazioni sia sulla posizione ( $0 \leq x \leq 1$ ), sia sulla velocità. Queste saturazioni pongono limitazioni significative alle prestazioni massime ottenibili dal sistema. Un modello di simulazione che ne tenga conto è rappresentato nella Figura 1.1.1.



Modello della valvola con saturazioni.

### 1.1.2 Progetto del regolatore in retroazione

Per determinare il modello linearizzato su cui effettuare il progetto, si assuma di voler mantenere un livello costante  $\bar{z}$ . In corrispondenza, data una portata d'ingresso di equilibrio  $\bar{w}_i$ , e ricordando che  $\eta(x)$  è una funzione monotona crescente, è possibile ricavare il valore  $\bar{x}$  che verifica la condizione di equilibrio

$$\bar{w}_i = \rho \varphi \eta(\bar{x}) \sqrt{\bar{z}}$$

dove si è posto  $\varphi = k A_v \sqrt{g}$ .

Il modello linearizzato attorno a questo equilibrio è

$$\delta \dot{z}(t) = \frac{1}{\rho A} \delta w_i(t) - \frac{\varphi \eta(\bar{x})}{2A\sqrt{\bar{z}}} \delta z(t) - \frac{\varphi \sqrt{\bar{z}}}{A} \left. \frac{d\eta}{dx} \right|_{\bar{x}} \delta x(t)$$

o, passando alla trasformata di Laplace,

$$sZ(s) = \frac{1}{\rho A} W_i(s) - \frac{\varphi \eta(\bar{x})}{2A\sqrt{\bar{z}}} Z(s) - \frac{\varphi \sqrt{\bar{z}}}{A} \left. \frac{d\eta}{dx} \right|_{\bar{x}} X(s)$$

Con semplici calcoli risulta

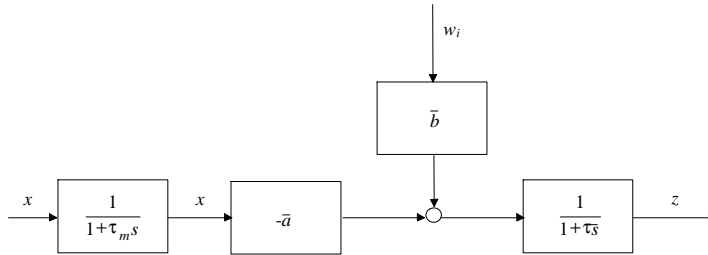
$$Z(s) = \frac{1}{1 + \bar{\tau}s} (\bar{b}W_i(s) - \bar{a}X(s))$$

dove si è posto

$$\bar{\tau} = \frac{2A\sqrt{\bar{z}}}{\varphi \eta(\bar{x})} \quad , \quad \bar{a} = \frac{2\bar{z}}{\eta(\bar{x})} \left. \frac{d\eta}{dx} \right|_{\bar{x}} \quad , \quad \bar{b} = \frac{2\sqrt{\bar{z}}}{\varphi \rho \eta(\bar{x})}$$

Capitolo1 Controllo del livello di un serbatoio

Lo schema complessivo di servomotore e processo è quindi quello rappresentato nella Figura 1.1.2



Modello linearizzato del sistema.

Si osservi che i guadagni  $\bar{a}$  e  $\bar{b}$  sono funzioni di  $\bar{x}$  che, per quanto detto, è a sua volta funzione di  $\bar{w}_i$  e  $\bar{z}$ . In particolare, per una valvola lineare  $\eta(x) = x$ , risulta

$$\bar{x} = \frac{\bar{w}_i}{\rho\varphi\sqrt{\bar{z}}}, \quad \bar{a} = \frac{2\bar{z}\sqrt{\bar{z}}\rho\varphi}{\bar{w}_i}, \quad \bar{b} = \frac{2\bar{z}}{\bar{w}_i}$$

quindi all'aumentare di  $\bar{w}_i$  diminuiscono i valori di  $\bar{a}$  e  $\bar{b}$ .

Il regolatore in retroazione per il controllo del livello mediante il movimento della valvola va progettato con riferimento alla funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{-\bar{a}}{(1 + \tau_m s)(1 + \tau s)}$$

il cui diagramma di Bode dei moduli asintotico è rappresentato nella Figura 1.1.2

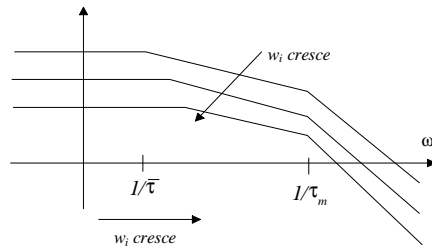


Diagramma di Bode asintotico.

La costante di tempo elettrica è molto più piccola dell'altra, si può quindi usare un *PI* con funzione di trasferimento

$$PI(s) = -\frac{\bar{K}_p}{\bar{\tau}} \frac{1 + \bar{\tau}s}{s}$$

a cui corrisponde la funzione d'anello

$$L(s) = \frac{\bar{K}_p \bar{a}}{\bar{\tau}s(1 + \tau_m s)}$$

con il diagramma di Bode asintotico dei moduli riportato nella Figura 1.1.2.

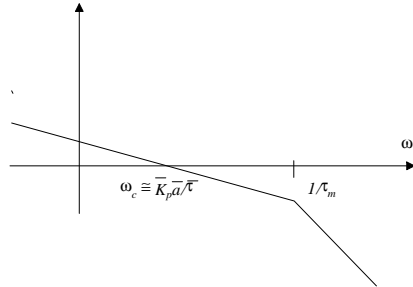


Diagramma di Bode della funzione d'anello.

La scelta del guadagno  $\bar{K}_p$  deve essere fatta per avere un buon margine di fase, buona robustezza rispetto a variazioni di  $\bar{a}$  (cioè del punto di lavoro individuato da  $\bar{w}_i$ ) e non sollecitare molto l'attuatore.

### 1.1.3 Un esempio di progetto

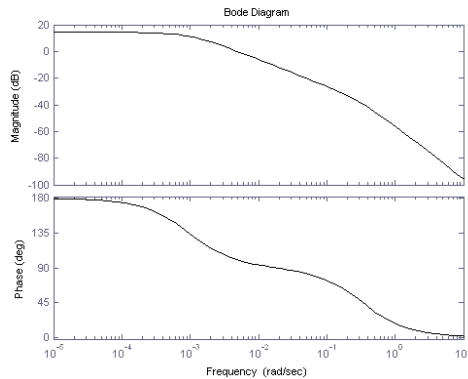
Si consideri un sistema caratterizzato dai seguenti parametri  $A = 1m^2$ ,  $A_v = 0.00035m^2$ ,  $k = 4$ ,  $\rho = 1000kg/m^3$ ,  $\tau_m = 3s$  e con ingressi nominali  $\bar{x} = 0.5$ ,  $\bar{w}_i = 2.5kg/s$ . In corrispondenza, dalle equazioni del modello si ricava il livello di equilibrio  $\bar{z} = 1.3m$ .

Il sistema linearizzato rispetto a questo equilibrio è

$$Z(s) = \frac{-5.2}{1 + 1041s} X(s) + \frac{1.04}{1 + 1041s} W_i(s)$$

$$X(s) = \frac{1}{1 + 3s} X^o(s)$$

I diagrammi di Bode della funzione di trasferimento  $G(s)$  tra  $X^o(s)$  e  $Z(s)$  sono riportati nella Figura 1.0.

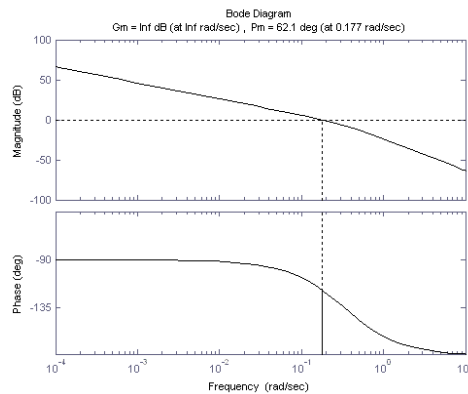


*Diagrammi di Bode della funzione di trasferimento del sistema.*

Poiché la costante di tempo del processo è molto più piccola di quella dell'attuatore, è conveniente usare un semplice regolatore *PI* che cancelli il polo a bassa frequenza e tale che la pulsazione di taglio garantisca un margine di fase adeguato. Si può quindi scegliere come funzione di trasferimento del regolatore

$$R(s) = \frac{\bar{K}_p}{\bar{\tau}} \frac{1 + \bar{\tau}s}{s} \quad , \quad \bar{\tau} = 1041$$

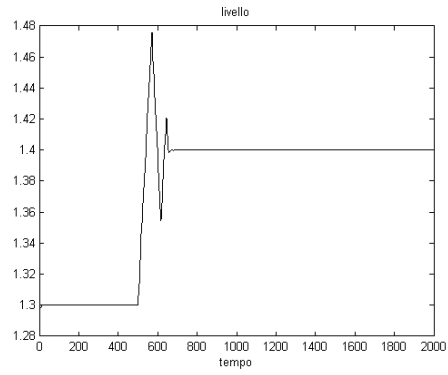
che, ponendo  $\bar{K}_p = -40$ , garantisce il margine di fase  $\varphi_m = 62^\circ$ , come illustrato dai diagrammi di Bode della funzione d'anello  $R(s)G(s)$  riportati nella Figura 1.0.



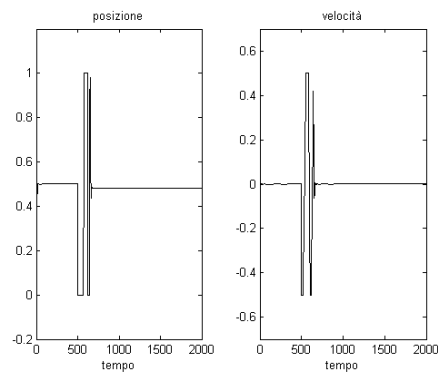
*Diagrammi di Bode della funzione d'anello.*

La risposta del livello a una variazione a scalino del segnale di riferimento che all'istante  $t = 500$  si porta dal valore  $z^o = 1.3m$ , corrispondente all'equilibrio considerato, al valore  $z^o = 1.4m$  è illustrata nella Figura 1.0. E' chiaro che tale andamento presenta delle notevoli oscillazioni ed è incompatibile con il margine di fase determinato in fase di progetto. La ragione di ciò è dovuta alla presenza delle saturazioni considerate nella simulazione del comportamento della valvola, cioè  $[0, 1]$  per la posizione dello stelo e  $[-0.5, 0.5]$  per la sua velocità. Infatti, durante il transitorio dovuto alla variazione del riferimento, entrambe queste saturazioni sono attive, come confermato dagli andamenti mostrati nella Figura 1.0.

A. U. Thor



*Livello.*

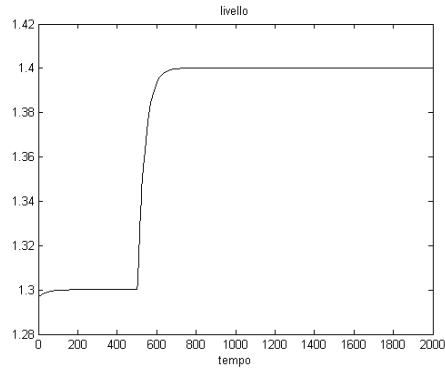


*Posizione e velocità dello stelo.*

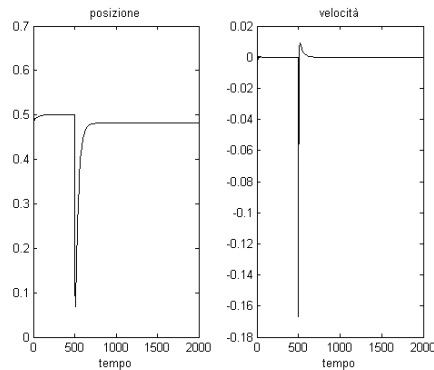
Per evitare l'effetto delle saturazioni dell'attuatore, una possibilità è quella di progettare un sistema di controllo meno veloce; per questo, è sufficiente usare un guadagno del regolatore decisamente più basso. Per esempio, ponendo  $\bar{K}_p = -5$ , si ottengono i risultati illustrati nelle Figure 1.0 e 1.0, decisamente più simili a quelli attesi in base all'analisi nel lineare.



## Capitolo1 Controllo del livello di un serbatoio



*Livello.*



*Posizione e velocità dello stelo.*

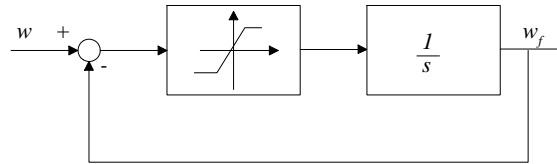
### 1.1.4 Prefiltraggio del segnale di riferimento

Per ridurre l'effetto delle saturazioni dell'attuatore, è prassi filtrare il segnale di riferimento prima di imporlo all'ingresso del sistema retroazionato. Il filtro può essere un semplice sistema del primo ordine con funzione di trasferimento

$$G_f(s) = \frac{1}{1 + \tau_f s}$$

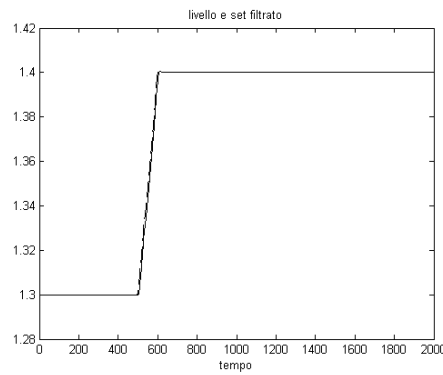
Il guadagno è unitario e, al variare della costante di tempo  $\tau_f$ , il filtro esercita un'azione filtrante passabasso più o meno marcata. Lo svantaggio di questa soluzione è che negli istanti immediatamente successivi a una variazione a scalino del riferimento, la derivata del segnale filtrato può essere ancora grande e dipende dall'ampiezza dello scalino. Infatti, è facile verificare per mezzo del teorema del valore iniziale che tale derivata all'istante  $t = 0$  è pari a  $A/\tau_f$ , dove  $A$  è l'ampiezza dello scalino di riferimento. Per ovviare a ciò, è possibile usare

lo schema di filtraggio, mostrato nella Figura 1.1.4, che genera un segnale di riferimento a rampa troncata la cui pendenza può essere imposta scegliendo gli estremi della saturazione.

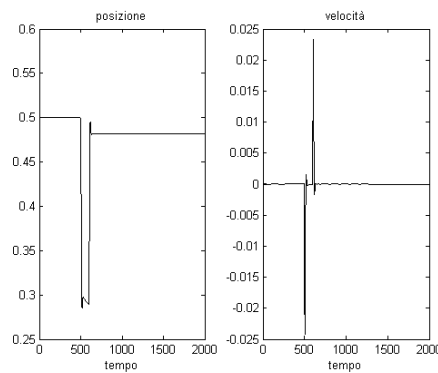


*Filtraggio del segnale di riferimento.*

Nel caso in esame, lo schema è stato impiegato con la saturazione  $[-0.001, 0.001]$  e usando il  $PI$  precedentemente sintetizzato con  $K_p = -40$ . I risultati ottenuti sono mostrati nelle Figure 1.1.4 e 1.1.4. Si noti che, nonostante l'elevato valore assoluto del guadagno del regolatore, le saturazioni dell'attuatore non sono mai attive.



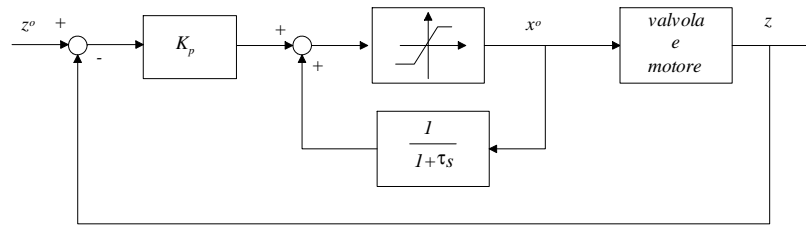
*Livello con prefiltraggio del riferimento.*



*Posizione e velocità dello stelo con prefiltraggio del riferimento.*

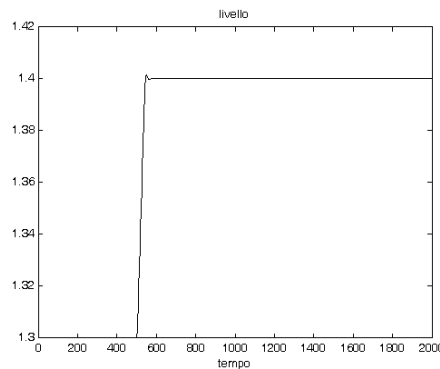
### 1.1.5 Realizzazione anti-windup del PI

Il filtraggio del segnale di riferimento, benché largamente impiegato, non può eliminare il problema delle saturazioni dell'attuatore a fronte di sollecitazioni dei disturbi che agiscono sul sistema. Per questo motivo, è di importanza fondamentale realizzare il regolatore secondo uno schema anti-windup, che tenga esplicitamente conto della saturazione dell'attuatore. Un'implementazione possibile è quella riportata nella Figura 1.1.5, in cui all'interno del regolatore è replicata la saturazione sulla posizione della valvola.

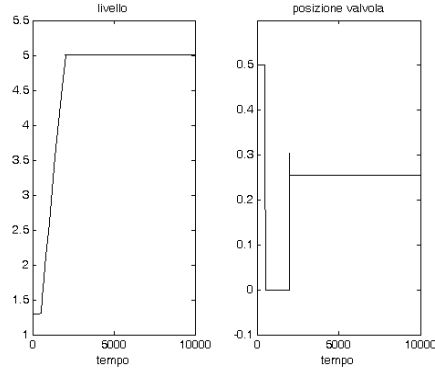


Realizzazione anti-windup del PI.

Il sistema di controllo riportato nella Figura 1.1.5, con guadagno del  $PI$  pari a  $\bar{K}_p = -40$ , produce la risposta mostrata nella Figura 1.1.5 a fronte di una variazione a scalino del segnale di riferimento. Benché la risposta sia molto soddisfacente, si osservi comunque che l'effetto delle saturazioni è quello di limitare la velocità di risposta del sistema. Per esempio, nella Figura 1.1.5 è riportata la risposta a fronte di una grande variazione del segnale di riferimento. E' chiaro che l'andamento a rampa, di tipo non lineare, è dovuto alla saturazione sulla posizione della valvola, che rimane attiva per un lungo periodo.



*Livello con PI anti-windup e  $K_p = -40$ .*



*Posizione e velocità dello stelo.*

### 1.1.6 Regolatore gain scheduling

I regolatori precedentemente progettati sono stati ottenuti a partire dal modello del sistema linearizzato attorno ad una data condizione di equilibrio. Si ricordi tuttavia che al variare del punto di lavoro ( $\bar{w}_i$ ) il modello linearizzato è comunque descritto da

$$Z(s) = \frac{1}{1 + \tau_s s} (bW_i(s) - aX(s))$$

dove

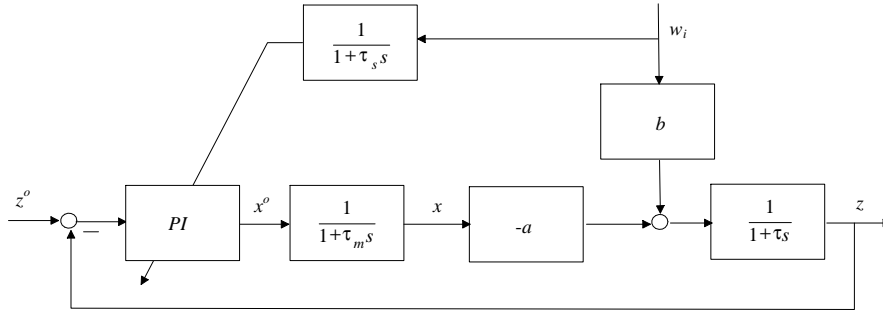
$$\tau = \frac{2A\sqrt{\bar{z}}}{\varphi\eta(\bar{x})}, \quad a = \frac{2\bar{z}}{\eta(\bar{x})} \left. \frac{d\eta}{dx} \right|_{\bar{x}}, \quad b = \frac{2\sqrt{\bar{z}}}{\varphi\rho\eta(\bar{x})}$$

Per tenere conto della non linearità del sistema, si può usare un regolatore gain scheduling in cui i parametri sono varianti in base al punto di lavoro. E' quindi necessaria una variabile di scheduling, in questo caso  $w_i$ , che indichi in quale punto di lavoro ci si trova, e quindi un meccanismo che modifichi i parametri del regolatore, come indicato nello schema riportato nella Figura 1.1.6. Si noti che, nella realizzazione di questi regolatori, usualmente la variabile di scheduling è filtrata dalla funzione di trasferimento

$$G_s(s) = \frac{1}{1 + \tau_s s}$$

per evitare che brusche variazioni della variabile di scheduling, in questo caso  $w_i$ , portino ad analoghe brusche variazioni dei parametri del *PI*, e quindi della regolazione. La determinazione della costante di tempo  $\tau_s$  può non essere semplice, così come, in casi meno banali, l'individuazione della variabile di scheduling da usare.

Capitolo1 Controllo del livello di un serbatoio



Regolatore PI gain scheduling.

Nel caso in esame, supponendo  $\eta(x) = x$ , nella funzione di trasferimento del PI

$$PI(s) = \frac{K_p}{T_i} \frac{1 + sT_i}{s}$$

si può modificare la costante di tempo integrale ponendo

$$T_i = \tau = \frac{2A\sqrt{\bar{z}}}{\varphi\bar{x}} = \frac{2A\rho\bar{z}}{\bar{w}_i}$$

Volendo poi mantenere costante al valore  $\bar{\omega}_c$  la pulsazione di taglio, e ricordando che

$$\omega_c \simeq \frac{-K_p a}{\tau} \implies K_p = -\frac{\bar{\omega}_c \tau}{a}$$

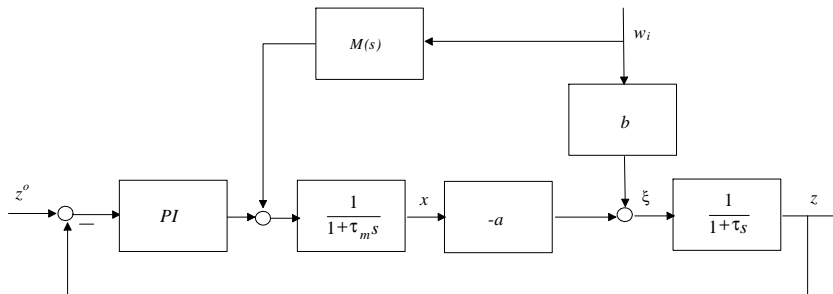
si ha

$$K_p = -\bar{\omega}_c \frac{2A\rho\bar{z}}{\bar{w}_i} \frac{\bar{w}_i}{2\bar{z}\sqrt{\bar{z}}\rho\varphi} = -\frac{\bar{\omega}_c A}{\sqrt{\bar{z}}\varphi}$$

In questo caso quindi, volendo mantenere costanti per ogni condizione operativa il livello  $\bar{z}$  e la pulsazione critica  $\bar{\omega}_c$ , non è necessario variare il guadagno  $K_p$ .

### 1.1.7 Compensazione del disturbo

Quando il disturbo  $w_i$  è misurabile, si può usare lo schema di compensazione riportato nella Figura 1.1.7.



*Schema di controllo con compensazione del disturbo.*

La funzione di trasferimento  $M(s)$  deve essere progettata per eliminare, o ridurre, l'effetto di  $w_i$  sulla variabile controllata  $z$ . In questo caso sarà sufficiente annullare la funzione di trasferimento in andata tra  $w_i$  e il segnale  $\xi$  ponendo

$$M(s) \frac{-a}{1 + \tau_m s} + b = 0 \implies M(s) = \frac{b}{a} (1 + \tau_m s)$$

Questo compensatore non è realizzabile, per renderlo tale si può:

- utilizzare il compensatore statico

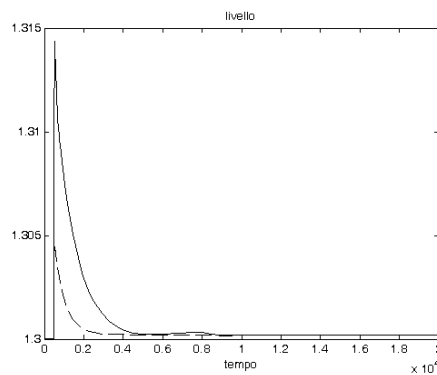
$$\bar{M} = M(0) = \frac{b}{a}$$

- aggiungere un polo a frequenza sufficientemente elevata

$$M(s) = \frac{b}{a} \frac{1 + \tau_m s}{1 + \frac{\tau_m}{10 \div 100} s}$$

In ogni caso, dato che  $b/a$  dipende dal punto di lavoro, anche il compensatore potrà dare buone prestazioni soltanto nell'intorno del punto di lavoro considerato, a meno di non renderlo adattativo secondo i criteri del progetto gain-scheduling precedentemente discusso.

Per valutare le proprietà di reiezione del disturbo con e senza compensazione diretta dello stesso, si supponga che la portata d'ingresso vari dal valore nominale a  $w_i = 5 \text{ kg/s}$ . La risposta del sistema di controllo, con PI anti-windup, è riportata nella Figura 1.1.7 nel caso in cui non ci sia compensazione del disturbo e quando invece si utilizza un compensatore statico.



*Risposta a variazione a scalino del disturbo con (linea tratteggiata) e senza (linea continua) compensatore.*

### 1.1.8 Retroazione linearizzante

A volte è possibile usare retroazioni per eliminare le non linearità del sistema, e quindi effettuare il progetto del regolatore con riferimento a un modello effettivamente lineare. Nel caso in esame, ricordando che il modello del sistema è

$$\frac{dz(t)}{dt} = \frac{1}{\rho A} \left( w_i(t) - k A_v \rho \sqrt{g} \eta(x(t)) \sqrt{z(t)} \right)$$

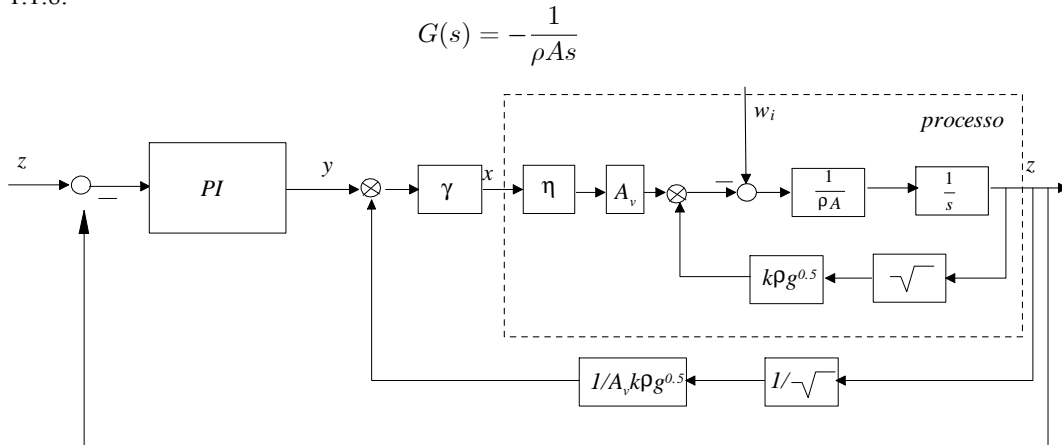
Si definisca ora  $\gamma(x)$  come "funzione inversa" di  $\eta(x)$ , cioè tale per cui  $\gamma(\eta(x)) = x$ , e si utilizza la legge di controllo

$$x(t) = \eta^{-1} \left( \frac{1}{k A_v \rho \sqrt{g} \sqrt{z(t)}} y(t) \right)$$

dove  $y$  è un segnale aggiuntivo, il sistema risultante è descritto dal sistema lineare

$$\frac{dz(t)}{dt} = \frac{1}{\rho A} (w_i(t) - y(t))$$

in cui  $y$  è la nuova variabile di controllo da generare mediante un opportuno schema di regolazione progettato con riferimento alla funzione di trasferimento, come mostrato nella Figura 1.1.8.



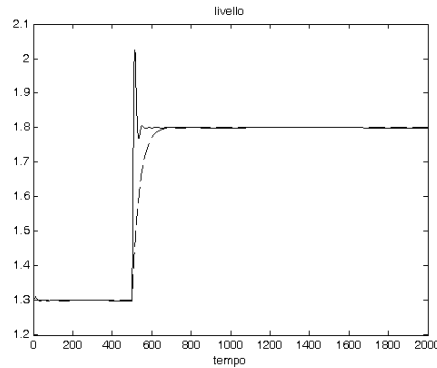
Retroazione linearizzante.

Si noti tuttavia che la variabile  $x$  non può essere modificata direttamente, ma si può solo agire sul comando  $x^o$  della valvola. Si sono quindi ignorate la dinamica della valvola e le sue non linearità, che possono rendere insoddisfacente il progetto basato sulla retroazione linearizzante. Questo metodo infatti è molto sensibile a eventuali errori di modello.

Per esempio, si è simulato il sistema della Figura 1.1.8 con un regolatore  $PI$  con funzione di trasferimento

$$R(s) = -\frac{200}{12} \frac{1 + 12s}{s}$$

a cui corrisponde, nel caso in cui in fase di analisi si trascuri completamente la dinamica della valvola,  $\varphi_m \simeq 70^\circ$ ,  $k_m = \infty$ ,  $\omega_c \simeq 0.2$  e rendendo disattive le saturazioni della valvola. La risposta a una variazione del segnale di riferimento ottenuta è riportata nella Figura 1.1.8, dove la si è anche confrontata con quella dello schema classico di regolazione con il PI caratterizzato da  $K_p = -5$  e  $T_i = 1041$ . Si può osservare che la risposta è più rapida, anche se presenta una sovraelongazione dovuta allo zero del *PI* che, in anello chiuso, risulta a frequenza più bassa rispetto ai poli. Tuttavia, se si ripete la simulazione dello schema con retroazione linearizzante rendendo attive le saturazioni della valvola, il sistema risultante ha un comportamento non accettabile, fortemente non lineare e con oscillazioni che non tendono a smorzarsi.



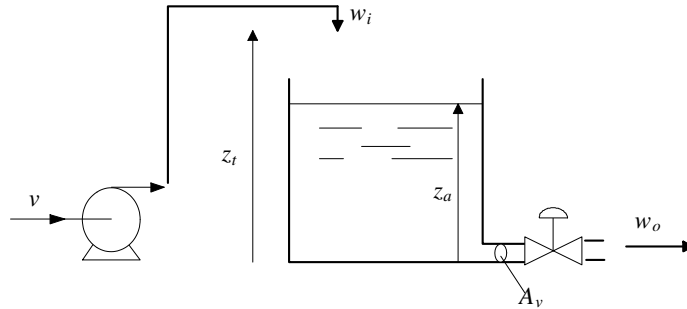
*Confronto tra schema classico e con retroazione linearizzante con saturazioni della valvola non attive.*

## 1.2 Controllo in portata del livello

Si supponga di voler regolare il livello del serbatoio agendo, anziché sulla valvola di uscita, sulla portata d'ingresso  $w_i$ , modificabile mediante il comando in tensione  $v$  a una pompa di immissione, come illustrato nella Figura 1.2.



## Capitolo1 Controllo del livello di un serbatoio



Il modello del serbatoio e della valvola è, anche in questo caso,

$$\frac{dz(t)}{dt} = \frac{w_i(t)}{\rho A} - \frac{k A_v \eta(x(t)) \sqrt{g}}{A} \sqrt{z(t)}$$

Si è visto nel capitolo precedente che la pompa può essere descritta da una relazione statica che lega, a velocità di rotazione  $\omega$  costante, il salto di pressione  $\Delta p$  alla portata. Più in generale, definendo la prevalenza

$$H = \frac{\Delta p}{\rho g} + \Delta z + \frac{\Delta u^2}{2g}$$

dove  $\Delta z$  e  $\frac{\Delta u^2}{2g}$  sono le variazioni di altezza ed energia cinetica all'ingresso e all'uscita, la pompa può essere descritta da una caratteristica che lega la portata e la prevalenza. Questa caratteristica, a sua volta, è usualmente ben rappresentata da una funzione quadratica del tipo

$$H = \alpha \omega^2 + \beta w^2$$

dove  $\alpha$  e  $\beta$  sono coefficienti opportuni.

Nell'esempio considerato, e riportato nella Figura 1.2, poiché considerando le sezioni di ingresso e di uscita della pompa risulta

$$\frac{\Delta p}{\rho g} = \frac{p_f - p_a}{\rho g} = z_t \quad , \quad \Delta z \simeq 0 \quad , \quad \frac{\Delta u^2}{2g} \simeq 0$$

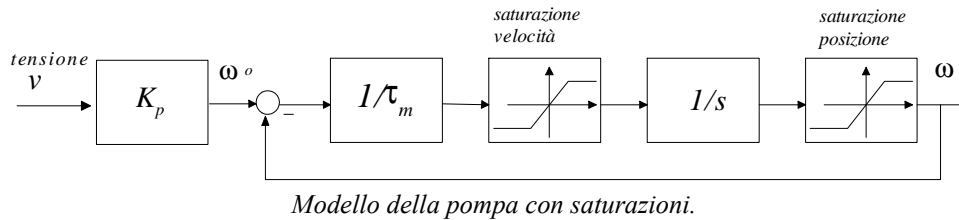
si ottiene

$$z_t = \alpha \omega^2 + \beta w^2$$

Il motore che aziona la pompa può essere modellizzato come un servocomando, descritto da un sistema lineare del primo ordine, che regola il numero di giri  $\omega$  in funzione della tensione imposta  $v$ . Il modello dinamico corrispondente è quindi dato dalle equazioni

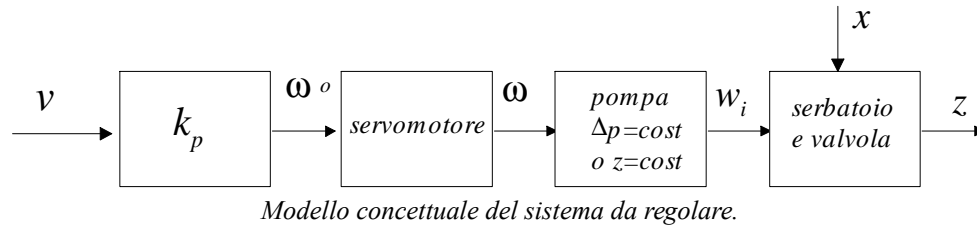
$$\begin{aligned} \dot{\omega}(t) &= \frac{1}{\tau_m} (\omega^o(t) - \omega(t)) \\ \omega^o(t) &= k_p v(t) \end{aligned}$$

Inoltre, poiché sono sempre presenti saturazioni sulla velocità di rotazione  $\omega$  e sulla sua variazione  $\dot{\omega}$ , come nel caso della valvola un modello di simulazione adeguato è quello mostrato nella Figura 1.0, in cui i limiti di saturazione su  $\dot{\omega}$  sono  $[-1, 1]$  e quelli su  $\omega$  sono  $[0, 1000]$ .



### 1.2.1 Progetto del sistema di controllo

Il sistema da regolare è descritto dallo schema a blocchi concettuale riportato nella Figura 1.2.1, in cui a tutti i blocchi è stato associato un modello, statico o dinamico.

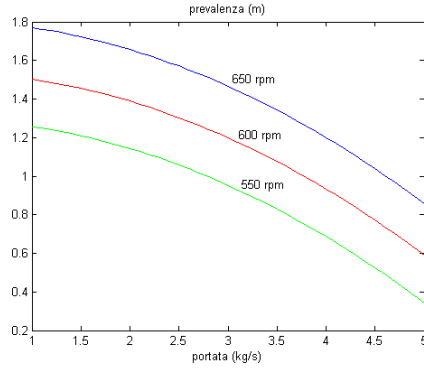


Si considerino ancora i dati del capitolo precedente relativi al serbatoio e alla valvola in uscita. In più, si assuma che la tensione di comando vari nell'intervallo  $[0V, 10V]$ , che il guadagno tra  $v$  e  $\omega^o$  sia  $k_p = 100$  e che la pompa sia descritta dalla relazione

$$z_t = 4.28 * 10^{-6} * \omega^2 - 0.038 * w^2$$

illustrata nella Figura 1.2.1 per diversi valori di velocità di rotazione.

## Capitolo1 Controllo del livello di un serbatoio



*Caratteristica della pompa.*

Per determinare lo stato di equilibrio che corrisponde al livello  $\bar{z} = 1.3m$ , con valvola lineare e apertura  $\bar{x} = 0.5$ , è necessario porre, come in precedenza,

$$\bar{w}_i = \rho k A_v \sqrt{g \bar{x} \sqrt{\bar{z}}} = 2.5 kg/s$$

Supponendo poi  $z_t = 1.8m$ , dalla caratteristica della pompa si ricava  $\bar{\omega} = 690rpm$  e  $\bar{v} = 690/100 = 6.9V$ .

Il modello linearizzato del sistema può essere visto come la serie del sottosistema relativo alla pompa, con ingresso la tensione  $v$  e in uscita la portata  $w_i$ , e del sottosistema formato dal processo e dalla valvola. Quest'ultimo è ancora, in trasformata di Laplace,

$$sZ(s) = \frac{1}{\rho A} W_i(s) - \frac{k A_v \sqrt{g \bar{x}}}{2 A \sqrt{\bar{z}}} Z(s) - \frac{k A_v \sqrt{g} \sqrt{\bar{z}}}{A} X(s)$$

Per quanto riguarda invece la pompa, si ha un termine lineare descritto da

$$\Omega(s) = \frac{k_p}{1 + \tau_m s} V(s)$$

e il guadagno relativo alla linearizzazione della caratteristica della pompa

$$w_i(t) = \sqrt{\frac{z_t - \alpha \omega^2}{\beta}}$$

che risulta

$$W_i(s) = k_w \Omega(s) = - \frac{\alpha \omega}{\beta \sqrt{\frac{z_t - \alpha \omega^2}{\beta}}} \Omega(s)$$

Con i dati precedenti si ha  $k_w = 0.0268$ .

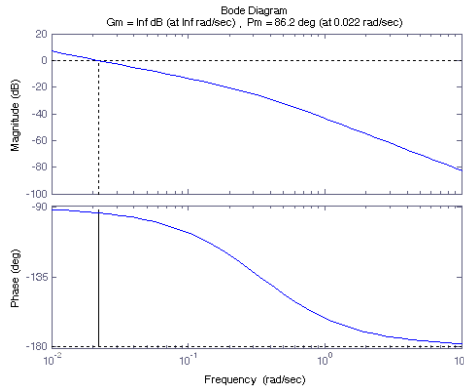
Infine, posto  $\tau_m = 3s$ , è possibile calcolare le funzioni di trasferimento complessive tra le trasformate degli ingressi  $v$  e  $x$  e dell'uscita  $z$ .

$$Z(s) = \frac{-5.2}{1 + 1041s} X(s) + \frac{1.04 * 2.68}{(1 + 1041s)(1 + 3s)} V(s)$$

Il controllo del livello agendo sulla portata può ancora essere effettuato con un regolatore  $PI$  con realizzazione antiwindup che tenga conto della saturazione sulla tensione di comando. In questo caso, si è considerato un  $PI$  con  $K_p = 10$  e  $T_i = 1041$ . In corrispondenza, la funzione d'anello è

$$L(s) = \frac{0.011}{s(1+3s)}$$

per la quale  $\omega_c \simeq 0.011$  e  $\varphi_m \simeq 88^\circ$ . I relativi diagrammi di Bode sono riportati nella Figura 1.2.1.



Diagrammi di Bode della funzione d'anello.

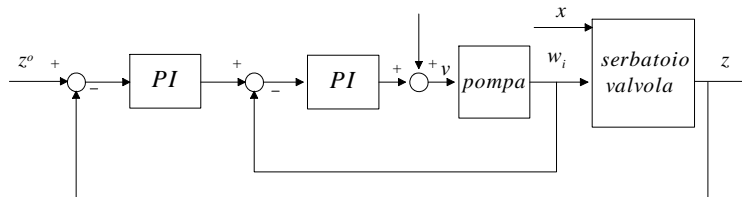
Nel caso in cui si possa misurare la portata  $w_i$  d'ingresso al serbatoio, è opportuno realizzare lo sistema di controllo in cascata mostrato nella Figura 1.2.1 in cui l'anello esterno, di regolazione del livello, può ancora essere realizzato con il  $PI$  precedente. L'anello interno, che ha il compito di ridurre l'effetto di disturbi sulla variabile di controllo e delle non linearità, è progettato per il modello linearizzato della pompa

$$W_i(s) = \frac{2.68}{(1+3s)}V(s)$$

In questo caso, si è progettato un  $PI$  con  $K_p = 200$  e  $T_i = 3$ . La funzione dell'anello interno è

$$L_{int}(s) = \frac{185}{s}$$

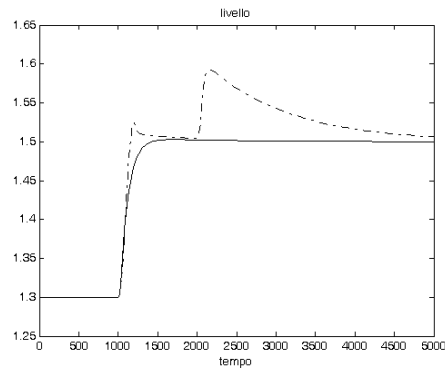
con  $\omega_c = 185$  e  $\varphi_m = 90^\circ$ . Si noti che l'ipotesi di disaccoppiamento in frequenza richiesta nel progetto dei sistemi di controllo in cascata è pienamente verificata.



## Capitolo1 Controllo del livello di un serbatoio

### *Schema di controllo in cascata.*

Le risposte dello schema tradizionale e di quello in cascata, a fronte di una variazione del riferimento da  $1.3m$  a  $1.5m$  all'istante  $t = 1000s$  e a seguito di un disturbo a scalino di ampiezza  $1V$  sulla tensione di comando al tempo  $t = 2000s$ , sono confrontate nella Figura 1.2.1, dalla quale si può notare come lo schema in cascata sia in grado di ridurre drasticamente l'effetto del disturbo.



*Risposte a variazioni del riferimento e al disturbo con schema in cascata (linea continua) e senza (linea tratteggiata).*