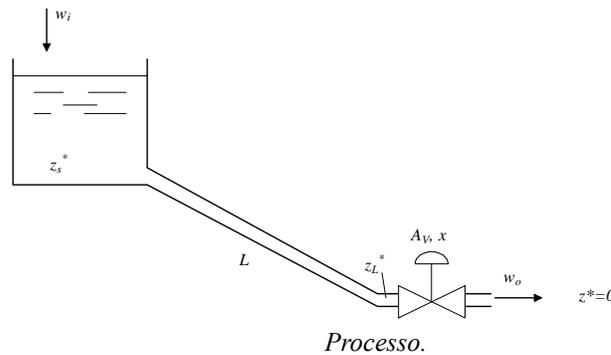


Capitolo 1

Modello e controllo di un sistema serbatoio-condotta

In questo capitolo si considera il sistema idraulico, rappresentato nella Figura 1 e formato da un serbatoio, una condotta e una valvola di uscita. Il problema di controllo associato è di tipo multivariabile, in quanto ci sono due variabili di controllo, cioè la portata d'ingresso w_i e l'alzata della valvola x , e due variabili controllate, cioè il livello nel serbatoio z_s e la portata di uscita w_o .



1.1 Modello

Sia A_s la sezione costante del serbatoio e si definiscano con w_i e w_o le sue portate di ingresso e di uscita. L'equazione di conservazione della massa del serbatoio, riferita alla sua altezza di carico z_s^* , è

$$\frac{dz_s^*(t)}{dt} = \frac{1}{\rho A_s} (w_i(t) - w_o(t))$$

Si associ alla condotta la coordinata spaziale χ , con $\chi = 0$ nella sua sezione di ingresso e $\chi = L$ nella sezione di uscita a monte della valvola. Siano poi A_c la sezione costante della condotta e z_L^* l'altezza di carico nella sezione a $\chi = L$. L'equazione della quantità di moto in condizioni stazionarie, riferita alla condotta e integrata tra $\chi = 0$ e $\chi = L$, è

$$\frac{dw_o(t)}{dt} = \frac{1}{L} \{ -\rho A_c g z_L^*(t) + \rho A_c g z_s^*(t) - L f(w_o(t)) w_o^2(t) \}$$

Infine l'equazione della valvola è

$$w_o(t) = k A_v \eta(x(t)) \sqrt{g \rho z_L^*(t)}$$

dove si è imposto il riferimento di altezza e pressione tale che $z_o^* = 0$, cioè $p_{amb} = 0$ e $z_o = 0$.

Ricavando dall'equazione della valvola l'altezza di carico in funzione della portata, e ipotizzando per semplicità $\eta(x) = x$ e $f(w_o) = \bar{f} = \text{cost}$, le equazioni precedenti possono essere scritte nella forma

$$\begin{aligned}\frac{dz_s^*(t)}{dt} &= \frac{1}{\rho A_s} (w_i(t) - w_o(t)) \\ \frac{dw_o(t)}{dt} &= \frac{\rho A_c g}{L} z_s^*(t) - \left\{ \frac{A_c}{L k^2 A_v^2 \bar{x}^2 \rho} + \bar{f} \right\} w_o^2(t)\end{aligned}$$

1.2 Progetto del sistema di controllo

Il progetto del sistema di controllo è effettuato, come nei casi precedenti, a partire dal sistema linearizzato nell'intorno di un dato punto di equilibrio.

1.2.1 Equilibrio e modello linearizzato

In condizioni di equilibrio risulta

$$\begin{aligned}\bar{w}_o &= \bar{w}_i \\ \bar{z}_s^* &= \frac{L}{\rho A_c g} \left\{ \frac{A_c}{L k^2 A_v^2 \bar{x}^2 \rho} + \bar{f} \right\} \bar{w}_o^2\end{aligned}$$

Il sistema linearizzato corrispondente, considerando come ingressi manipolabili w_i e x , è

$$\begin{aligned}\delta \dot{z}_s^*(t) &= -\frac{1}{\rho A_s} \delta w_o(t) + \frac{1}{\rho A_s} \delta w_i(t) \\ \delta \dot{w}_o(t) &= +\frac{\rho A_c g}{L} \delta z_s^*(t) - 2\bar{w}_o \left\{ \frac{A_c}{L k^2 A_v^2 \bar{x}^2 \rho} + \bar{f} \right\} \delta w_o(t) + \frac{2A_c \bar{w}_o^2}{L k^2 A_v^2 \bar{x}^3 \rho} \delta x(t)\end{aligned}$$

Si considerino ora i seguenti parametri fisici

$$\begin{aligned}A_s &= 8m^2, A_c = 0.15m^2, A_v = 0.0035m^2, L = 15m, \\ \rho &= 1000kg/m^3, k = 4, \bar{f} = 1.24 * 10^{-6} kg^{-1}, (C_f = 0.0035)\end{aligned}$$

In corrispondenza degli ingressi nominali $\bar{w}_i = 70kg/s$, $\bar{x} = 0.5048$, in base ai risultati precedenti si ottengono i valori di equilibrio $\bar{w}_o = 70kg/s$, $\bar{z}_s^* = 10m$.

Il modello linearizzato che corrisponde a questo equilibrio è

$$\begin{bmatrix} Z_s^*(s) \\ W_o(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{zw}(s) = \frac{0.28}{(1 + 2286s)} & G_{zx}(s) = \frac{-39.62}{(1 + 2286s)(1 + 0.0357s)} \\ G_{ww}(s) = \frac{1}{(1 + 2286s)(1 + 0.0357s)} & G_{wx}(s) = \frac{3887s}{(1 + 2286s)(1 + 0.0357s)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_i(s) \\ X(s) \end{bmatrix}$$

1.2.2 Progetto del regolatore

Poiché il sistema è multivariabile, o *MIMO* (Multi Input Multi Output), è opportuno analizzare le interazioni tra le variabili di controllo e le variabili di uscita mediante la matrice dei guadagni relativi *RGA* che in questo caso è

$$RGA = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

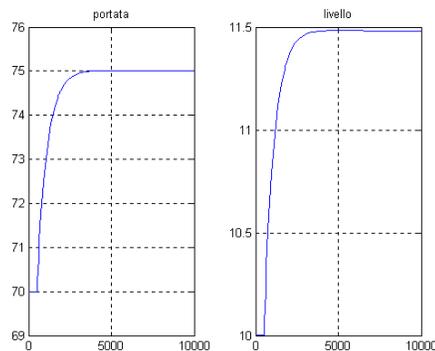
Dalla *RGA* è chiaro che, in condizioni statiche, la chiusura della valvola non modifica la portata in uscita, come evidente per la presenza dell'azione derivativa nella funzione di trasferimento tra $X(s)$ e $W_o(s)$. Per questa ragione, volendo usare uno schema di controllo decentralizzato in cui i due regolatori a un ingresso e un'uscita, o *SISO* (Single Input Single Output), possono operare in maniera indipendente anche quando l'altro è disattivato, è necessario progettare i due regolatori per le coppie di variabili di ingresso e uscita (w_i, w_o) e (x, z_s^*) .

I regolatori utilizzati nello schema decentralizzato progettato sono i due *PI*

$$W_i(s) = \frac{4}{2286} \frac{1 + 2286s}{s} E_w(s) \quad , \quad X(s) = -\frac{1}{10 * 2286} \frac{1 + 2286s}{s} E_z(s)$$

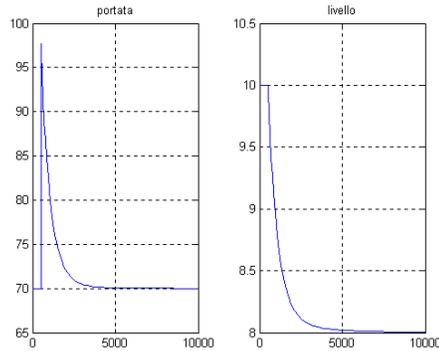
progettati sulle singole funzioni di trasferimento $G_{ww}(s)$ e $G_{zx}(s)$ per avere pulsazione critica $\omega_c \simeq 0.0017$ e $\varphi_m \simeq 90^\circ$. Si osservi in particolare il guadagno negativo del secondo *PI*, necessario per far sì che il guadagno d'anello corrispondente sia positivo.

Per valutare le prestazioni dei due regolatori singolarmente, è stato chiuso un solo anello, lasciando la seconda variabile di controllo al suo valore nominale. Si sono così ottenuti, a fronte di una variazione a scalino del segnale di riferimento relativo alla variabile controllata, gli andamenti riportati nelle Figure 1.2.2, 1.2.2.



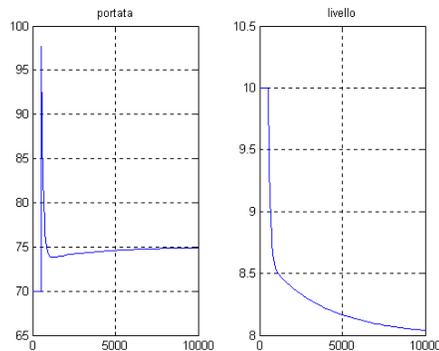
A. U. Thor

Regolazione della sola portata (set-point = 75).



Regolazione del solo livello (set-point = 8).

Si osservi che le risposte sono quelle attese in base al progetto e che l'effetto dell'azione derivativa tra l'apertura della valvola e la portata di uscita è evidente. Quando invece entrambi gli anelli sono chiusi e si danno variazioni contemporanee ai due set-point, le risposte sono significativamente diverse, come mostrato nella Figura 1.2.2.



Anelli di regolazione entrambi chiusi.

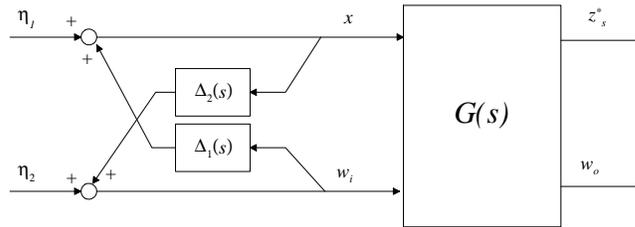
Benché a regime le grandezze sotto controllo vadano al valore desiderato, i transitori si deteriorano sensibilmente rispetto al caso in cui esse siano regolate singolarmente. Questo risultato conferma che l'analisi della matrice RGA , pur fornendo valide indicazioni sul grado di accoppiamento statico tra le variabili di controllo e controllate, non consente di trarre conclusioni definitive sulle prestazioni dinamiche che si possono ottenere con uno schema decentralizzato in cui i regolatori sono progettati sulle funzioni di trasferimento dirette.

1.2.2.1 Uno schema di controllo decentralizzato Per eliminare l'effetto degli accoppiamenti si potrebbe utilizzare lo schema di disaccoppiamento all'indietro mostrato nella

Figura 1.2.2.1, che in questo caso porterebbe alla realizzazione dei due disaccoppiatori con funzione di trasferimento

$$\Delta_1(s) = -G_{wx}(s)/G_{ww}(s) = -3387s \quad , \quad \Delta_2(s) = -G_{zw}(s)/G_{zx}(s) = 0.007(1+0.0357s)$$

Si noti che la loro realizzazione richiede l'introduzione di un polo ad alta frequenza per garantire la fisica realizzabilità. Questo schema di disaccoppiamento, progettato sul modello linearizzato, è risultato poco efficace quando applicato al sistema non lineare.

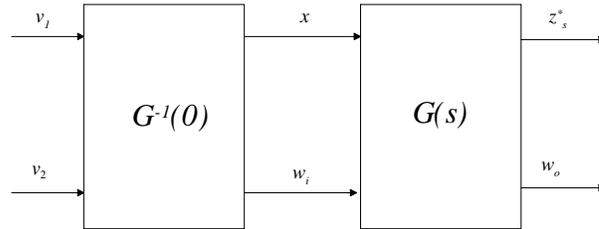


Schema di disaccoppiamento "all'indietro".

Per semplicità realizzativa, si è invece implementato il disaccoppiamento statico illustrato nella Figura 1.2.2.1 e descritto da

$$\begin{bmatrix} w_i(t) \\ x(t) \end{bmatrix} = G(0)^{-1} \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix}$$

dove $G(0)$ è la matrice dei guadagni statici del processo e v_1, v_2 sono variabili di controllo ausiliarie.



Schema di disaccoppiamento statico.

A seguito dell'introduzione di questo disaccoppiatore statico, il sistema da regolare è descritto dalla matrice di trasferimento

$$\begin{bmatrix} Z_s^*(s) \\ W_o(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{(1+2286s)(1+0.0357s)} & \frac{0.0102s}{(1+2286s)(1+0.0357s)} \\ \frac{-8000s}{(1+2286s)(1+0.0357s)} & \frac{1}{(1+0.0357s)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix}$$

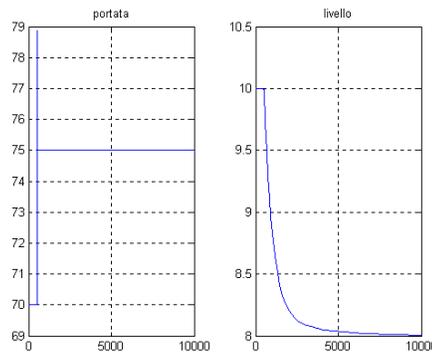
Per questo sistema si può ancora progettare un regolatore decentralizzato in cui i due PI sono progettati con riferimento alle funzioni di trasferimento sulla diagonale della matrice. Si

osservi in particolare che la regolazione della portata d'uscita può essere resa estremamente veloce.

I regolatori impiegati nello schema così ottenuto sono

$$V_1(s) = \frac{4}{2286} \frac{1 + 2286s}{s} E_z(s) \quad , \quad V_2(s) = \frac{4}{0.0357} \frac{1 + 0.0357s}{s} E_w(s)$$

che forniscono i risultati mostrati nella Figura 1.2.2.1. E' evidente che con questo schema si sono conseguite delle prestazioni decisamente superiori a quelle fornite dal regolatore decentralizzato. Si noti infine che, nello schema con il disaccoppiatore statico, le saturazioni da imporre sulle variabili ausiliarie v_1, v_2 , così come l'inizializzazione dello stato dei rispettivi regolatori, vanno ricavati a partire dalle saturazioni effettive delle vere variabili di controllo w_i e x .



Controllo con disaccoppiatore statico.

1.2.3 Controllo della portata di uscita con l'apertura della valvola

Si è detto in precedenza che il controllo della portata di uscita dal condotto w_o agendo sull'apertura della valvola x non è opportuno in quanto la relativa funzione di trasferimento ha uno zero nell'origine, o derivatore. Tuttavia, la chiusura preliminare di un eventuale anello di controllo che regoli il livello z_s^* nel serbatoio agendo sulla portata di ingresso w_i modifica la funzione di trasferimento tra x e w_o che, pertanto, in generale non contiene più l'azione derivativa.

Infatti, si può progettare inizialmente il regolatore

$$W_i(s) = R_z(s)E_z(s) = R_z(s) (Z_s^o(s) - Z_s^*(s))$$

con $R_z(s)$ progettato con riferimento a $G_{zw}(s)$, per esempio

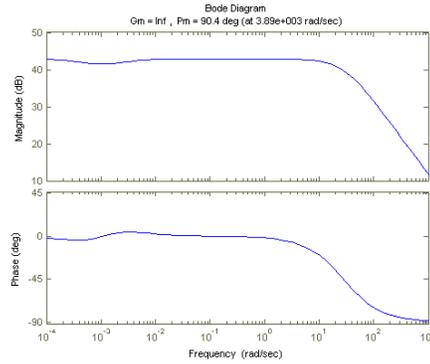
$$R_z(s) = 500 \frac{1 + 2286s}{s}$$

in cui il guadagno potrebbe essere allargato a piacere per rendere il sistema sempre più veloce, a meno ovviamente dell'effetto delle saturazioni.

Una volta progettato e realizzato $R_z(s)$, con semplici conti si può verificare che risulta

$$W_o(s) = \left(G_{wx}(s) - \frac{G_{zx}(s)G_{ww}(s)R_z(s)}{1 + G_{zw}(s)R_z(s)} \right) X(s)$$

Questa nuova funzione di trasferimento è apparentemente complicata, tuttavia i corrispondenti diagrammi di Bode, riportati nella Figura 1.2.3, mostrano che si può assimilare a quella di un sistema del primo ordine con costante di tempo $T = 27$.

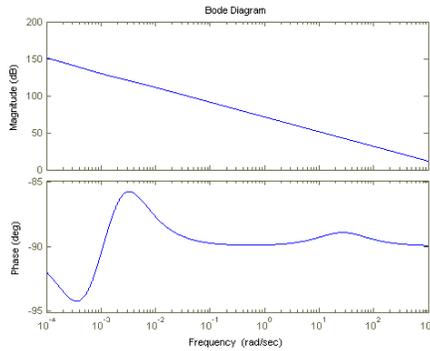


Diagrammi di Bode associati a w_o/x quando il livello z_s^ è regolato con w_i .*

Per questo sistema si può allora progettare il regolatore *PI*

$$X(s) = R_w(s)E_w(s) = \frac{1 + 27s}{s} E_w(s)$$

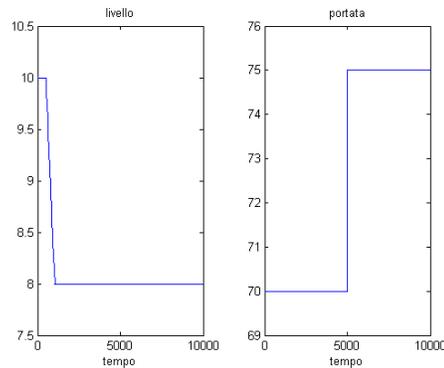
a cui corrisponde una funzione d'anello che, come mostrano i diagrammi di Bode della Figura 1.2.3, è all'incirca quella di un integratore.



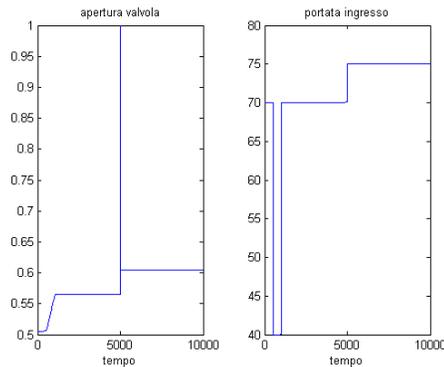
Diagrammi di Bode della funzione d'anello relativa al controllo di portata.

Le prestazioni del sistema di controllo risultante sono mostrate nelle Figure 1.2.3 e 1.2.3, relativa a una variazione a scalino del riferimento di livello a $t = 500$ e a una variazione del

riferimento di portata a $t = 5000$. Si può notare che le prestazioni che si ottengono sono molto soddisfacenti, limitate soltanto, per quello che riguarda il livello, dalla saturazione imposta alla portata d'ingresso.



Controllo di livello con portata d'ingresso e di portata d'uscita con apertura valvola.



Andamento delle variabili di controllo.

Benché questa soluzione di controllo appaia decisamente migliore delle precedenti, vanno sottolineati due aspetti.

- In generale, nel progetto sequenziale dei regolatori, che prevede di tener conto dei regolatori già sintetizzati (in questo caso R_z), va ricordato che la chiusura dell'anello in esame può modificare in modo sostanziale le prestazioni di quelli già progettati. Può quindi essere necessaria una procedura iterativa, non necessariamente convergente.
- Nel caso in cui il regolatore di livello sia messo fuori servizio, per un guasto o qualsiasi altra ragione, la funzione di trasferimento tra x e w_o torna a essere $G_{xw}(s)$ e, per la presenza dell'azione derivativa, la portata di uscita torna a essere non più regolabile agendo sulla valvola.