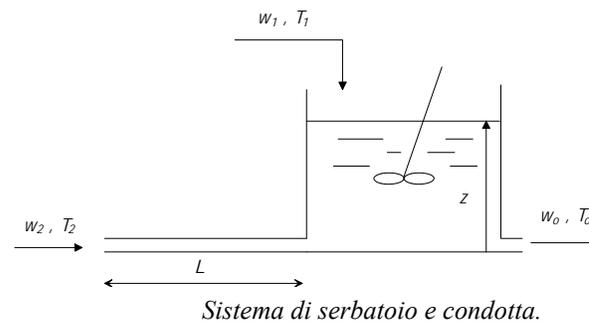


Capitolo 1

Modello di un sistema serbatoio-condotta

In questo capitolo si mostra come sia possibile determinare una funzione di trasferimento, con termini non razionali, anche per sistemi lineari descritti da equazioni differenziali alle derivate parziali. Si illustra poi un esempio di applicazione del predittore di Smith per ridurre gli effetti di un ritardo di tempo nel conseguimento di adeguate prestazioni del sistema di controllo. Il processo considerato è illustrato nella Figura 1, in cui la portata di ingresso w_2 è costante e vale \bar{w}_2 , mentre la temperatura T_2 può variare. Al contrario, la portata w_1 è manipolabile, ma la temperatura T_1 è da ritenersi costante. Si supponga inoltre che la portata di uscita w_0 sia imposta dall'esterno.



1.1 Modello matematico

Per semplicità, nella derivazione del modello si fanno le seguenti ipotesi:

- sono trascurabili tutti gli scambi termici con le pareti della condotta e del serbatoio, così come quelli attraverso il pelo libero dell'acqua;
- il fluido all'interno del serbatoio è perfettamente miscelato, quindi l'entalpia all'interno si può ritenere uguale a quella in uscita;
- si trascura il lavoro dovuto alla miscelazione;
- l'energia totale dipende esclusivamente dall'energia interna, quindi sono trascurabili le energie cinetica e potenziale, e si può porre

$$h \simeq e = cT$$

dove c è il calore specifico e T la temperatura.

Siano A_c e A le sezioni costanti della condotta e del serbatoio. Poiché anche la densità ρ è costante e $w(x, t) = \bar{w}_2$, l'equazione di conservazione di conservazione dell'energia per la

A. U. Thor

condotta si può scrivere come

$$\rho A_c \frac{\partial e(x, t)}{\partial t} + \bar{w}_2 \frac{\partial e(x, t)}{\partial x} = \phi(t) + \psi(t)$$

Supponendo che non ci siano contributi di lavoro o calore dall'esterno, e definendo con $T_c(x, t)$ la temperatura del liquido all'interno della condotta al tempo t e in coordinata x , l'equazione precedente diventa

$$c\rho A_c \frac{\partial T_c(x, t)}{\partial t} + c\bar{w}_2 \frac{\partial T_c(x, t)}{\partial x} = 0$$

o anche, poiché $\bar{w}_2 = \rho A_c \bar{u}_2$,

$$\frac{\partial T_c(x, t)}{\partial t} + \bar{u}_2 \frac{\partial T_c(x, t)}{\partial x} = 0$$

Questa è un'equazione differenziale alle derivate parziali che può essere risolta per mezzo delle trasformate di Laplace, dalle quali risulta

$$sT_c(x, s) + \bar{u}_2 \frac{dT_c(x, s)}{dx} = 0$$

la cui soluzione è

$$T_c(x, s) = ke^{-\frac{sx}{\bar{u}_2}}$$

dove la costante k si ottiene imponendo la condizione al contorno

$$T_c(0, s) = T_2(s)$$

da cui

$$k = T_2(s)$$

Dalle relazioni precedenti si conclude che la funzione di trasferimento tra la temperatura $T_2(t)$ all'ingresso della condotta e la temperatura $T_c(L, t)$ all'ingresso del serbatoio ($x = L$) è

$$G(s) = e^{-\frac{sL}{\bar{u}_2}}$$

e corrisponde a quella di un ritardo di tempo pari a $\tau = \frac{L}{\bar{u}_2}$, dovuto al fenomeno di trasporto. Antitrasformando si ha quindi

$$T_c(L, t) = T_2(t - \tau)$$

Il modello complessivo, in cui è necessario includere la consueta equazione di conservazione della massa per il serbatoio, è pertanto

$$\begin{aligned} \rho A \frac{dz(t)}{dt} &= w_1(t) + \bar{w}_2 - w_o(t) \\ c\rho A z(t) \frac{dT(t)}{dt} &= cw_1(t) (T_1(t) - T(t)) + c\bar{w}_2 (T_2(t - \tau) - T(t)) \end{aligned}$$

1.2 Progetto del regolatore

Per determinare il regolatore è necessario ricavare il modello linearizzato e su questo effettuare il progetto.

1.2.1 Equilibrio e modello linearizzato

Si noti che all'equilibrio risulta

$$\begin{aligned}\bar{w}_1 + \bar{w}_2 - \bar{w}_o &= 0 \\ \bar{T} &= \frac{\bar{w}_1 \bar{T}_1 + \bar{w}_2 \bar{T}_2}{\bar{w}_1 + \bar{w}_2}\end{aligned}$$

A questo equilibrio corrisponde il modello linearizzato

$$\begin{aligned}\delta \dot{z}(t) &= \frac{1}{\rho A} (\delta w_1(t) - \delta w_o(t)) \\ \delta \dot{T}(t) &= -\frac{\bar{w}_1 + \bar{w}_2}{\rho A \bar{z}} \delta T(t) + \frac{\bar{T}_1 - \bar{T}}{\rho A \bar{z}} \delta w_1(t) + \frac{\bar{w}_1}{\rho A \bar{z}} \delta T_1(t) + \frac{\bar{w}_2}{\rho A \bar{z}} \delta T_2(t - \tau)\end{aligned}$$

Posto

$$\alpha_1 = \frac{\bar{T}_1 - \bar{T}}{\rho A \bar{z}}, \alpha_2 = \frac{\bar{w}_1}{\rho A \bar{z}}, \alpha_3 = \frac{\bar{w}_2}{\rho A \bar{z}}, \beta = \rho A, \gamma = \frac{\bar{w}_1 + \bar{w}_2}{\rho A \bar{z}}$$

il modello linearizzato scritto in termini di trasformate di Laplace è

$$\begin{aligned}Z(s) &= \frac{1}{\beta s} (W_1(s) - W_o(s)) \\ T(s) &= \frac{1}{s + \gamma} (\alpha_1 W_1(s) + \alpha_2 T_1(s) + \alpha_3 e^{-\tau s} T_2(s))\end{aligned}$$

1.2.2 Progetto del regolatore

Il controllo del livello z con la portata w_1 non presenta particolari difficoltà, e può essere realizzato con un regolatore PI , come già discusso in vari esempi precedenti.

Per quanto riguarda invece il controllo della temperatura T agendo sulla temperatura d'ingresso T_2 , si noti che la funzione di trasferimento del processo da considerare nel progetto è

$$G_T(s) = \frac{\alpha_3 e^{-\tau s}}{s + \gamma} = \frac{\alpha_3 / \gamma}{1 + s / \gamma} e^{-\tau s} = \frac{\frac{\bar{w}_2}{\bar{w}_1 + \bar{w}_2}}{1 + \frac{\rho A \bar{z}}{\bar{w}_1 + \bar{w}_2} s} e^{-\frac{L}{\bar{w}_2} s}$$

Dato il regolatore PI con funzione di trasferimento

$$R_T(s) = \mu \frac{1 + s / \gamma}{s}$$

A. U. Thor

la funzione d'anello risultante è

$$L_T(s) = \frac{\mu \alpha_3 e^{-\tau s}}{\gamma s}$$

a cui corrisponde il margine di fase

$$\varphi_m = 180^\circ - 90^\circ - \frac{\mu \alpha_3}{\gamma} \tau \frac{180^\circ}{\pi}$$

Volendo ottenere un dato margine di fase $\bar{\varphi}_m$, il guadagno μ deve essere scelto come

$$\begin{aligned} \mu &= (90^\circ - \bar{\varphi}_m) \frac{\gamma}{\alpha_3 \tau} \frac{\pi}{180^\circ} \\ &= (90^\circ - \bar{\varphi}_m) \frac{\bar{w}_1 + \bar{w}_2}{\bar{w}_2} \frac{\bar{u}_2}{L} \frac{\pi}{180^\circ} \\ &= (90^\circ - \bar{\varphi}_m) \frac{\bar{w}_1 + \bar{w}_2}{\rho A_c L} \frac{\pi}{180^\circ} \end{aligned}$$

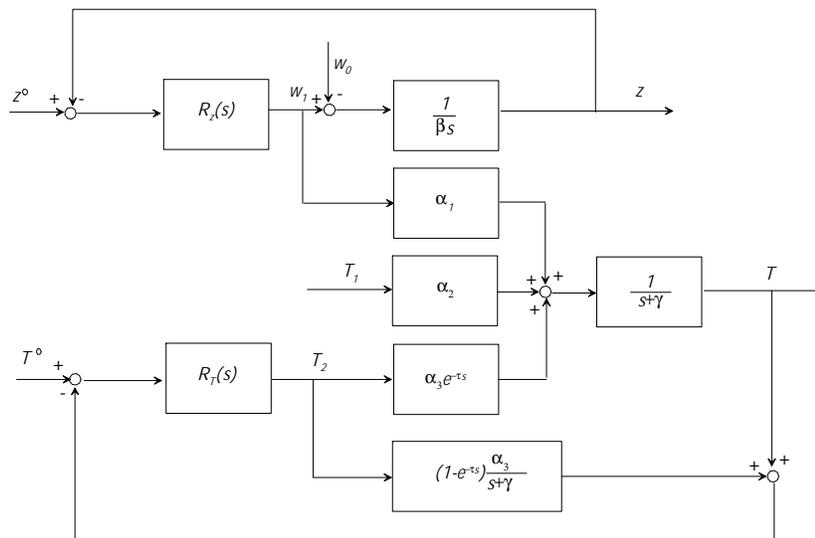
cioè tanto minore quanto più lungo è il condotto.

Si noti che, poiché il ritardo compare tra la variabile manipolabile T_2 e la variabile controllata T , ma non nella funzione di trasferimento tra il disturbo T_1 (o w_1) e T , un eventuale schema di compensazione di T_1 (o w_1) prevederebbe l'impiego del compensatore anticipativo

$$M(s) = -\frac{\alpha_2}{\alpha_3} e^{\tau s}$$

ovviamente non realizzabile.

Per ridurre l'influenza del ritardo, è possibile usare il seguente schema con predittore di Smith (N:B: SCHEMA DA RIFARE IN DESIGNER)



Schema di controllo con predittore di Smith.

Definendo per semplicità di notazione

$$\bar{G}_T(s) = \frac{\alpha_3}{s + \gamma}$$

e supponendo di considerare come disturbo soltanto T_1 , con semplici elaborazioni è possibile mostrare che risulta

$$T(s) = \frac{R_T(s)\bar{G}_T(s)e^{-\tau s}}{1 + R_T(s)\bar{G}_T(s)}T^o(s) + \frac{\alpha_2 \bar{G}_T(s) (1 + (1 - e^{-\tau s}) R_T(s)\bar{G}_T(s))}{\alpha_3 (1 + R_T(s)\bar{G}_T(s))}T_1(s)$$

Da questa equazione si verifica facilmente che il predittore di Smith è uno schema molto efficace per quanto riguarda la risposta del sistema a fronte di variazioni del segnale di riferimento. Infatti l'equazione caratteristica è

$$1 + R_T(s)\bar{G}_T(s) = 0$$

e il regolatore $R_T(s)$ può essere progettato con riferimento solo alla parte razionale $\bar{G}_T(s)$ della funzione di trasferimento del processo. Inoltre, nella funzione di trasferimento tra $T^o(s)$ e $T(s)$ il ritardo è solo in linea di andata, peraltro ineliminabile con qualsiasi schema.

Al contrario, la funzione di trasferimento tra il disturbo T_1 e T è notevolmente più complessa e può rendere la risposta del sistema poco soddisfacente a fronte di variazioni di T_1 , anche se l'equazione caratteristica resta sempre la stessa.