

### ESERCIZIO

Si consideri il sistema a tempo discreto descritto dalla seguente equazione alle differenze.

$$y(k) = \frac{3}{2} y(k-1) + y(k-2) + \frac{1}{2} u(k-1) + u(k-2)$$

- 1) Dire quante variabili di stato sono necessarie per descrivere il sistema.
- 2) Calcolare l'uscita di equilibrio in corrispondenza di  $\bar{u} = 1$ .
- 3) Calcolare i primi 4 valori della risposta all'impulso del sistema con  $y(k)=0, k<0$ .
- 4) Discutere la stabilità dell'equilibrio calcolato al punto 2.

## SOLUZIONE

1) Sono necessarie 2 variabili di stato, perché il sistema è del secondo ordine. La sua funzione di trasferimento è infatti data da

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{0.5z + 1}{z^2 - 1.5z - 1}$$

2) All'equilibrio,  $y$  è costante. Chiamando  $\bar{y}$  tale valore, dall'equazione alle differenze si trova

$$\bar{y} = \frac{3}{2} \bar{y} + \bar{y} + \frac{1}{2} \bar{u} + \bar{u}$$

e quindi  $\bar{y} = -1$ . Peraltro, tale valore coincide, come è ovvio, con il guadagno  $G(1)$ .

3) Dall'equazione alle differenze, ricordando che l'impulso è diverso da zero solo all'istante  $k=0$ , oppure dalla procedura di lunga divisione applicata a  $G(z)$ , si ricava

$$y(0) = 0, y(1) = \frac{1}{2}, y(2) = \frac{7}{4}, y(3) = \frac{25}{8}, y(4) = \frac{103}{16} \dots$$

4) Dato che il sistema è lineare, la stabilità dell'equilibrio è equivalente a quella del sistema, che può essere accertata attraverso l'esame del polinomio caratteristico, già calcolato al punto 1,

$$j(z) = z^2 - 1.5z - 1 = (z - 2)(z + 0.5)$$

Poiché una delle radici ha modulo maggiore di 1, lo stato di equilibrio è instabile.