

ESERCIZIO

Si consideri il sistema a tempo discreto di Fig. 1, dove

$$G_1(z) = \frac{1}{z} \qquad G_2(z) = \frac{8}{z - 0.6}$$

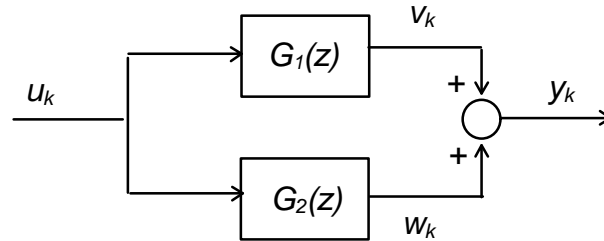


Fig. 1

- 1) Scegliendo v_k e w_k come variabili di stato, ricavare una rappresentazione di stato del sistema complessivo.
- 2) Mostrare che gli autovalori della rappresentazione di stato coincidono con i poli di $G_1(z)$ e $G_2(z)$.
- 3) Calcolare la funzione di trasferimento tra u_k e y_k .
- 4) Ricavare l'equazione alle differenze che esprime il legame tra u_k e y_k .
- 5) Calcolare i valori di y_k per $k = 0, 1, 2, 3, 4$ quando u_k è un impulso unitario.

SOLUZIONE

1) La rappresentazione di stato è

$$v_{k+1} = u_k$$

$$w_{k+1} = 0.6w_k + 8u_k$$

$$y_k = v_k + w_k$$

2) Gli autovalori della matrice della dinamica

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.6 \end{bmatrix}$$

sono $z_1 = 0$ e $z_2 = 0.6$ (la matrice è diagonale) e coincidono effettivamente con i poli di $G_1(z)$ e $G_2(z)$. D'altra parte, i due sistemi sono in parallelo e i poli non vengono modificati.

3) Essendo i due sistemi in parallelo, la funzione di trasferimento complessiva è

$$G(z) = G_1(z) + G_2(z) = \frac{1}{z} + \frac{8}{z - 0.6} = \frac{9z - 0.6}{z(z - 0.6)}$$

Ovviamente, allo stesso risultato si perviene utilizzando la rappresentazione di stato.

4) In base all'espressione di $G(z)$ ricavata in precedenza, il legame tra ingresso e uscita è

$$y_k = 0.6y_{k-1} + 9u_{k-1} - 0.6u_{k-2}$$

5) Si ricordi innanzitutto che l'impulso a tempo discreto è

$$u_k = \begin{cases} 0 & k \neq 0 \\ 1 & k = 0 \end{cases}$$

e che la sua trasformata Zeta è unitaria.

I primi valori della risposta all'impulso possono essere calcolati in almeno tre modi equivalenti: (a) usando ricorsivamente la rappresentazione di stato ricavata al punto 1 a partire da condizioni iniziali nulle; (b) usando ricorsivamente l'equazione alle differenze del punto 4 a partire da condizioni iniziali nulle; (c) effettuando la divisione tra numeratore e denominatore di $G(z)$ e interpretando i coefficienti del quoziente come i valori della risposta all'impulso. In ogni caso risulta:

$$y_0 = 0 \quad , \quad y_1 = 9 \quad , \quad y_2 = 4.8 \quad , \quad y_3 = 2.88 \quad , \quad y_4 = 1.728$$