ESERCIZIO 1

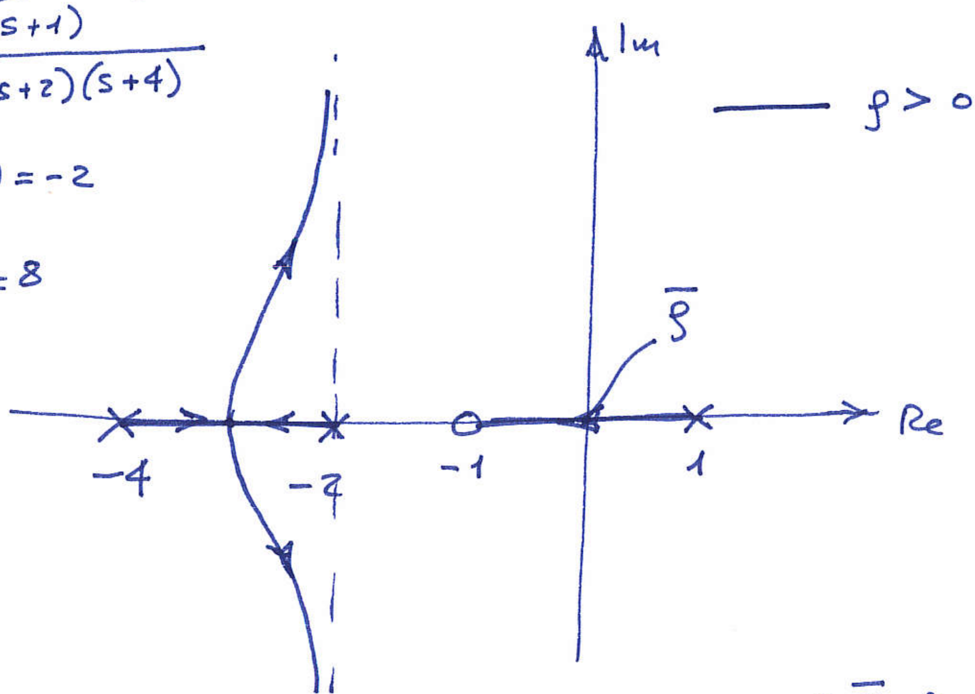
Si debba progettare un sistema di controllo per stabilizzare il sistema con funzione di trasferimento $G(s) = \dfrac{4(s+1)}{(s-1)(s+2)(s+4)}$.

1.1) Utilizzando il *luogo delle radici* mostrare che è possibile stabilizzare il sistema con un regolatore ad azione proporzionale $R(s) = \mu$.

$$L(s) = \frac{\underbrace{4\mu}_{\rho}(s+1)}{(s-1)(s+2)(s+4)}$$

$$x_A = \frac{1}{2}(1-5) = -2$$

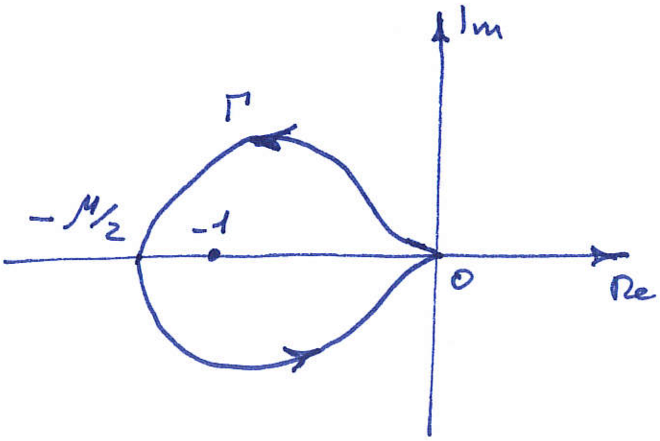
$$\bar{\rho} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 4}{1} = 8$$



- IL SISTEMA È ASINTOTICAMENTE STABILE PER $\rho > \bar{\rho} = 8$ OVVERO PER $\mu > \frac{\bar{\rho}}{4} = 2$

1.2) Verificare il risultato precedente mediante il criterio di Nyquist.

- PER $\mu > 0$ IL DIAGRAMMA DI NYQUIST HA IL SEGUENTE ANDAMENTO QUALITATIVO:



- INOLTRE $P = 1$.
- RISULTA $N = 1 = P$ SOLO SE $-\frac{\mu}{2} < -1$ OVVERO $\mu > 2$

1.3) Spiegare cosa si intende per baricentro dei poli in anello chiuso e calcolarlo per il sistema in esame.

– IN GENERALE:

$$x_B(\rho) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} s_i(\rho) \quad \text{DOVE } s_i(\rho) \text{ SONO I POLI IN A.C.}$$

– NEL CASO IN ESAME, POICHÈ $\nu = 2$, IL BARICENTRO NON DIPENDE DA ρ. QUINDI

$$x_B(\rho) = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n} s_i(\rho) = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n}(-p_i) = -\frac{5}{3}$$

1.4) Usando il luogo delle radici dimostrare che, per elevati valori di μ, la risposta dell'uscita controllata a uno scalino del riferimento presenta un'ampia sovraelongazione.

– LA FDT DA CONSIDERARE È $G_{yw}(s) = F(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)}$, CHE HA COME ZERI GLI ZERI DI $L(s)$ E COME POLI I POLI IN ANELLO CHIUSO.

– PER $\mu \to \infty$ UN POLO IN A.C. TENDE A CANCELLARSI CON LO ZERO (SI VEDA IL RAMO REALE DA +1 A −1). GLI ALTRI 2 POLI SI SPOSTANO ~~VERSO~~ GLI ASINTOTI E DIVENTANO QUINDI COMPLESSI CONIUGATI CON BASSO SMORZAMENTO.

– TALE BASSO SMORZAMENTO GENERA UNA FORTE SOVRAELONGAZIONE NELLA RISPOSTA ALLO SCALINO.

ESERCIZIO 2

Si consideri il sistema MIMO descritto dalla seguente rappresentazione di stato:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_1(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u_2(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} x(t)$$

2.1) Verificare che la matrice di trasferimento di tale sistema è $G(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{2}{s+1} \\ \frac{1}{s+1} & \frac{2}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}$.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad D = 0$$

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+2 & 1 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+2 & s+3 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix} = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} s+2 & 2(s+2) \\ s+2 & 2 \end{bmatrix}$$

CHE È IDENTICA A QUELLA INDICATA

2.2) Si progetti una disaccoppiatore "in avanti", analizzandone la realizzabilità e verificando che non provoca cancellazioni critiche .

$$\Delta(s) = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{G_{12}(s)}{G_{11}(s)} \\ -\frac{G_{21}(s)}{G_{22}(s)} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -\frac{s+2}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

NON REALIZZABILE !

- PER VERIFICARE CHE NON POSSONO AVVENIRE CANC. CRITICHE BASTA VERIFICARE CHE POLI E ZERI DI $G(s)$ HANNO $Re < 0$.

- POLI DI $G(s)$: $-1, -2$ OK

- ZERI DI $G(s)$: RADICI DI $\det(G(s))$

$$\det G(s) = \frac{2}{(s+1)^2(s+2)} - \frac{2}{(s+1)^2} = \frac{-2(s+1)}{(s+1)^2(s+2)} = \frac{-2}{(s+1)(s+2)}$$

QUINDI GLI ZERI NON CI SONO !

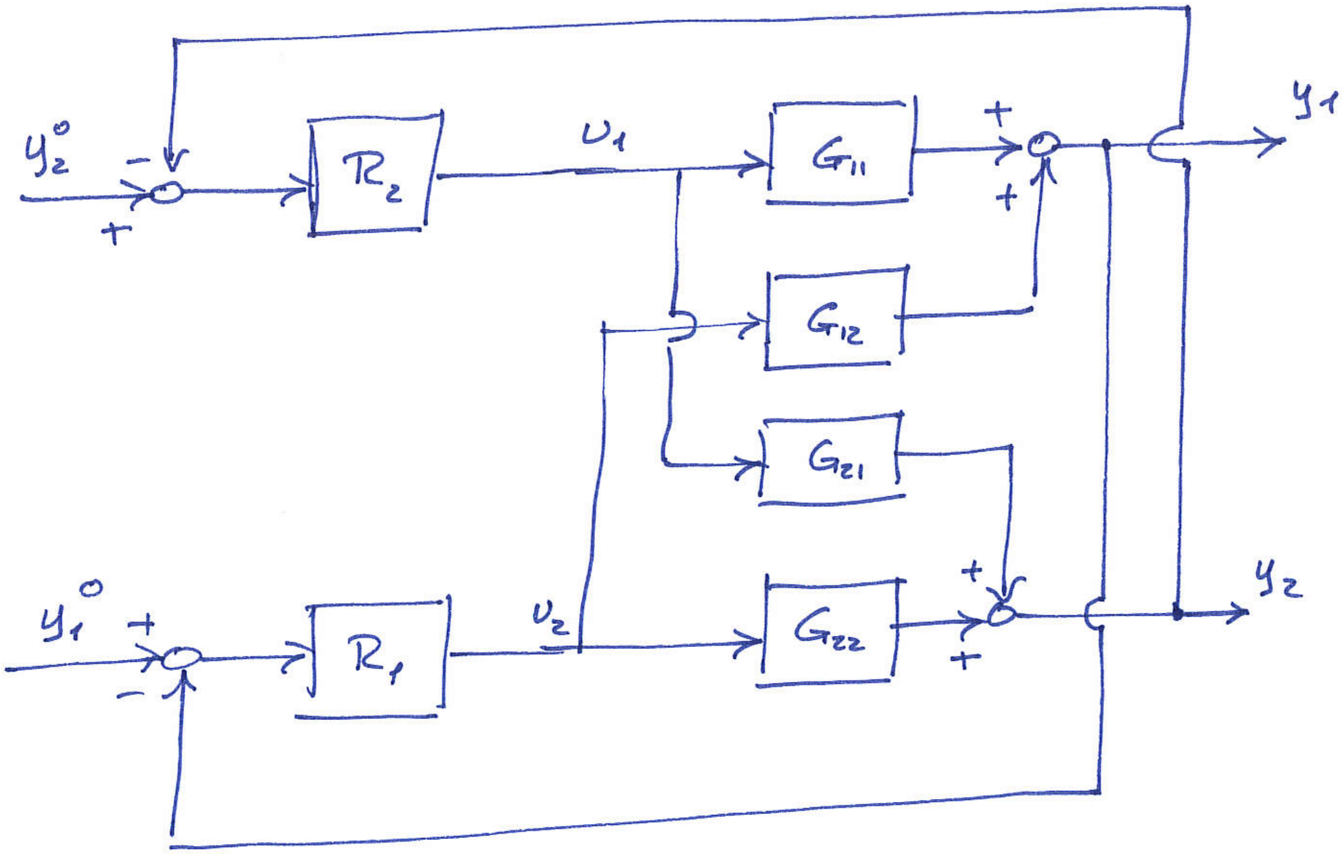
2.3) Nel caso che si volesse progettare un sistema di controllo decentralizzato, scegliere gli accoppiamenti ingresso-uscita e disegnare il corrispondente schema a blocchi.

- CON IL METODO RGA:

$$G(0) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \lambda = \frac{1}{1-2} = -1$$

$\lambda = -1 \Longrightarrow$ MEGLIO USARE GLI ACCOPPIAMENTI $(u_2, y_1), (u_1, y_2)$

- LO SCHEMA PER IL CONTROLLO DECENTRALIZZATO È QUINDI IL SEGUENTE:

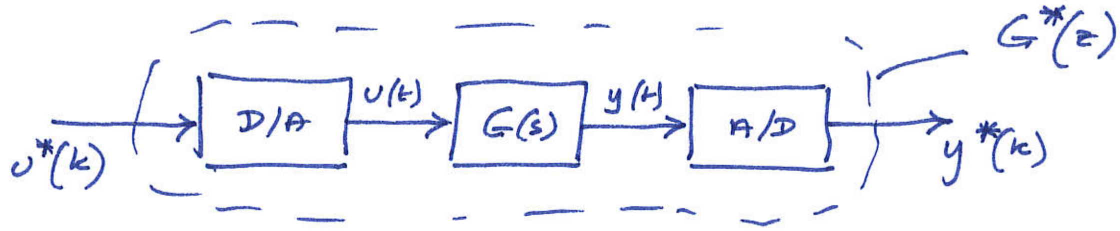


ESERCIZIO 3

Si consideri il sistema a tempo continuo descritto dalla funzione di trasferimento $G(s)=\dfrac{25}{1+50s}$.

3.1) Per un dato periodo di campionamento T, spiegare cosa si intende per sistema a segnali campionati associato a $G(s)$.

- È IL SISTEMA DESCRITTO DAL SEGUENTE SCHEMA A BLOCCHI:



- SI TRATTA DI UN SISTEMA ESTERNAMENTE A TEMPO DISCRETO, LINEARE E INVARIANTE, DESCRITTO DALLA FDT $G^*(z)$, CHE SI PUÒ CALCOLARE A PARTIRE DA $G(s)$ E T.

3.2) Ponendo $T=8$, si calcoli la funzione di trasferimento del sistema a segnali campionati associato a $G(s)$.

$$G(s)=\frac{25}{1+50s}=25\,\frac{1/50}{s+1/50}=25\,\frac{p}{s+p}\,,\quad p=\frac{1}{50}$$

- RICORDANDO LA FORMULA PER $G(s)$ DEL PRIMO ORDINE STRETTAMENTE PROPRI E CON GUADAGNO UNITARIO, SI OTTIENE:

$$G^*(z)=25\,\frac{1-\lambda}{z-\lambda}\,,\quad \lambda=e^{-pT}=e^{-8/50}\simeq 0.85$$

- QUINDI:

$$G^*(z)\simeq 25\,\frac{0.15}{z-0.85}=\frac{3.75}{z-0.85}$$

3.3) Per controllare il sistema si utilizzi il regolatore digitale, che opera con periodo $T = 8$, descritto dalla seguente legge di controllo:

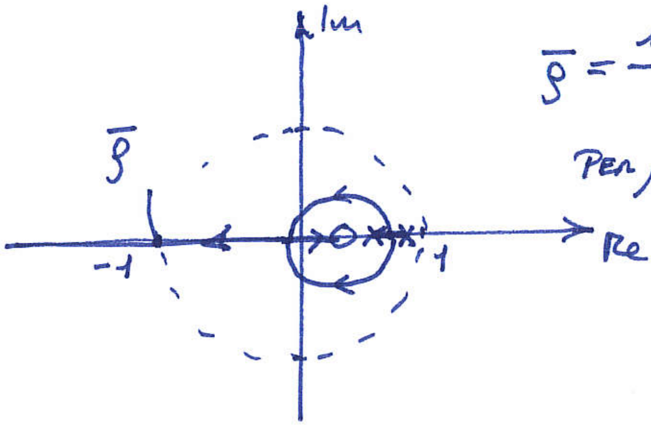
$$u^*(k) = 0.9u^*(k-1) + \mu\big(0.2e^*(k) - 0.15e^*(k-1)\big)$$

Determinare il massimo valore del parametro μ che conserva la stabilità del sistema di controllo.

$$R^*(z) = \mu\,\frac{0.2z - 0.15}{z - 0.9}$$

$$L(z) = R^*(z)G^*(z) = 3.75\mu\,\frac{0.2z - 0.15}{(z-0.85)(z-0.9)} = \overbrace{(0.75\mu)}^{\rho}\,\frac{z - 0.75}{(z-0.85)(z-0.9)}$$

– TRACCIAMO IL LUOGO DELLE RADICI (DIRETTO) ASSOCIATO A $L(z)$.
(QUALITATIVO)



$$\bar{\rho} = \frac{1.9 \cdot 1.85}{1.75} \simeq 2$$

PER $\mu > 0$ IL SISTEMA RIMANE AS. STAB.
SE E SOLO SE

$$\rho = 0.75\mu < \bar{\rho} \simeq 2$$

OVVERO

$$\mu < \frac{2}{0.75} \simeq 2.67$$

3.4) Con $\mu = 1$, spiegare come si potrebbero valutare l'errore a transitorio esaurito con riferimento a scalino e la pulsazione critica ω_c del sistema di controllo risultante.

– ERRORE A TRANSITORIO ESAURITO

$$e^*(\infty) = \frac{1}{1 + \mu_L}, \quad \mu_L = L(1) = \frac{0.75 \cdot 0.25}{0.15 \cdot 0.1} \simeq 12.5$$

$$e^*(\infty) = \frac{1}{13.5} = 0.0741$$

– PULSAZIONE CRITICA (A. TEMPO CONTINUO)

– USANDO L'APPROSSIMAZIONE $\tilde{R}(s) = e^{-sT/2} R^*(e^{sT})$ SI PUÒ CALCOLARE:

$$\tilde{L}(s) = \tilde{R}(s)G(s) = R^*(e^{sT})G(s)e^{-sT/2}$$

E LA PULSAZIONE CRITICA È IL VALORE DI ω PER CUI

$$|\tilde{L}(j\omega)| = 1$$

ESERCIZIO 4

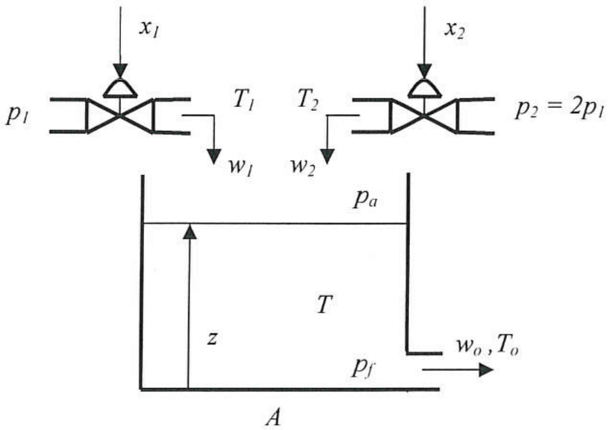
Si consideri il sistema termo-idraulico schematicamente descritto in figura. Le pressioni p_a, p_1 e p_2 e le temperature T_1 e T_2 sono costanti. Si ponga $p_a = 0$ e $p_2 = 2p_1$. Le valvole sono identiche e descritte dal modello

$$w_i(t) = kx_i(t)\sqrt{\rho p_i}$$

dove ρ rappresenta la densità del liquido. La portata di deflusso è modellizzata da

$$w_o(t) = k_o\sqrt{\rho p_f(t)}$$

Si trascurino gli scambi di calore e di lavoro con l'ambiente circostante e si supponga $e_t \cong e = h = cT$, dove c è il calore specifico. Poiché il liquido nel serbatoio è perfettamente miscelato si può ritenere che sia $T_o = T$.



4.1) Determinare il modello dinamico nonlineare del processo, assumendo come variabile di uscita la temperatura T.

– UTILIZZANDO LE LEGGI DI CONSERVAZIONE DI MASSA ED ENERGIA, SI OTTIENE:

$$\dot{z} = \frac{1}{\rho A}\left(kx_1\sqrt{\rho p_1} + kx_2\sqrt{2\rho p_1} - k_o\rho\sqrt{gz}\right)$$

$$\dot{T} = \frac{1}{\rho A z}\left(kx_1\sqrt{\rho p_1}(T_1 - T) + kx_2\sqrt{2\rho p_1}(T_2 - T)\right)$$

$$y = T$$

4.2) Calcolare i valori di equilibrio del livello $\bar{z}$ e della temperatura $\bar{T}$ corrispondenti a $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = 0.5$.

$$0.5\,k\sqrt{\rho p_1} + 0.5\,k\sqrt{2}\sqrt{\rho p_1} = k_0 \rho \sqrt{g}\sqrt{\bar{z}}$$

DA CUI:

$$\bar{z} = \frac{\left(0.5\,k\sqrt{\rho p_1}\,(1+\sqrt{2})\right)^2}{k_0^2 \rho^2 g}$$

- INOLTRE

$$\bar{T} = \frac{0.5\,k\sqrt{\rho p_1}\,(T_1 + \sqrt{2}\,T_2)}{0.5\,k\sqrt{\rho p_1}\,(1+\sqrt{2})} = \frac{T_1 + \sqrt{2}\,T_2}{1+\sqrt{2}}$$

4.3) Il modello linearizzato del processo nell'intorno dello stato di equilibrio è dato da

$$\delta\dot{z}(t) = -a_1 \delta z(t) + b_{11}\delta x_1(t) + b_{12}\delta x_2(t)$$

$$\delta\dot{T}(t) = -a_2 \delta T(t) + b_{21}\delta x_1(t) + b_{22}\delta x_2(t)$$

Determinare i valori dei coefficienti che compaiono in tale modello in funzione dei parametri fisici e geometrici.

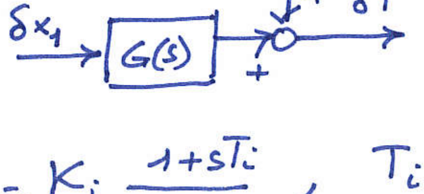
$$a_1 = \frac{k_0\sqrt{g}}{2A\sqrt{\bar{z}}}, \quad b_{11} = \frac{k\sqrt{p_1}}{A\sqrt{\rho}}, \quad b_{12} = \frac{k\sqrt{2p_1}}{A\sqrt{\rho}}$$

$$a_2 = \frac{1}{\rho A \bar{z}}\left(k\bar{x}_1\sqrt{\rho p_1} + k\bar{x}_2\sqrt{2\rho p_1}\right)$$

$$b_{21} = \frac{k\sqrt{\rho p_1}}{\rho A \bar{z}}(T_1 - \bar{T}), \quad b_{22} = \frac{k\sqrt{2\rho p_1}}{\rho A \bar{z}}(T_2 - \bar{T})$$

4.4) Dovendo regolare la temperatura T usando x_1 come variabile di controllo, si progetti un controllore PI che consenta di ottenere una prescritta pulsazione critica ω_c. Progettare inoltre un compensatore del disturbo x_2.

- IL SISTEMA LINEARIZZATO È DESCRITTO DAL SEGUENTE SCHEMA:



$$G(s) = \frac{b_{21}}{s + a_2}$$

$$H(s) = \frac{b_{22}}{s + a_2}$$

$$R(s) = K_i\,\frac{1 + sT_i}{s}, \quad T_i = \frac{1}{a_2}, \quad K_i = \frac{a_2}{b_{21}}\,\omega_c$$

$$C(s) = -\frac{b_{22}}{b_{21}}$$