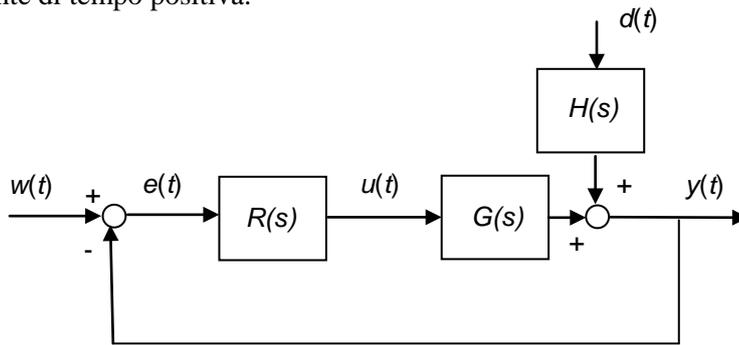


**ESERCIZIO 1**

Si consideri il sistema di controllo mostrato in figura, dove  $G(s) = \frac{1}{(1+s\tau)^2}$ ,  $H(s) = \frac{-5}{1+s\tau}$ ,  $R(s) = \frac{k}{s}$

e  $\tau$  è una costante di tempo positiva.



**1.1)** Tracciare il luogo dei poli in anello chiuso al variare del guadagno  $k$  del regolatore. Calcolare in particolare i punti di confluenza e diramazione sull'asse reale.

**1.2)** Attraverso il luogo delle radici, mostrare che condizione necessaria e sufficiente per la stabilità asintotica del sistema in anello chiuso è che  $0 \leq k < k_{\max}$ , dove il valore  $k_{\max}$  è inversamente proporzionale a  $\tau$ .

**1.3)** Dimostrare che, variando  $k$ , è impossibile ottenere un sistema in anello chiuso asintoticamente stabile più veloce rispetto al sistema in anello aperto descritto da  $G(s)$ .

**1.4)** Progettare un compensatore in anello aperto del disturbo  $d$  (supposto misurabile) e disegnare il corrispondente schema a blocchi.

**ESERCIZIO 2**

Si consideri un regolatore digitale, che opera con periodo  $T = 1$ , descritto dalla seguente legge di controllo:

$$u^*(k) = \beta e^*(k-1)$$

dove  $\beta$  è un parametro positivo.

**2.1)** Calcolare la corrispondente funzione di trasferimento  $R^*(z)$ .

**2.2)** Verificare se tale regolatore può essere ottenuto dalla discretizzazione (mediante i metodi di Eulero in avanti o all'indietro) di un regolatore  $R^\circ(s)$  a tempo continuo.

**2.3)** Supponendo di usare il regolatore digitale  $R^*(z)$  per controllare un sistema descritto dalla funzione di trasferimento  $G(s) = \frac{2}{s} e^{-0.1s}$ , tarare il parametro  $\beta$  in modo da ottenere una pulsazione critica  $\omega_c \cong 0.4$ .

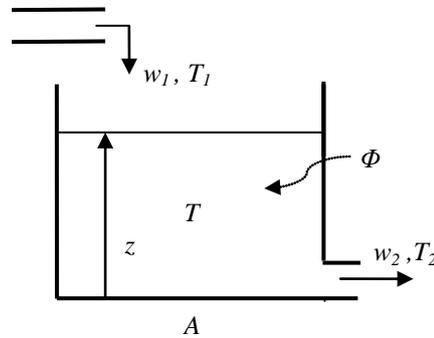
**2.4)** In corrispondenza del regolatore digitale progettato, valutare il margine di fase  $\varphi_m$  e l'errore a transitorio esaurito  $e(\infty)$  in risposta a uno scalino del riferimento.

**2.5)** Dire come cambierebbero  $\varphi_m$  ed  $e(\infty)$  se si usasse, al posto del regolatore digitale, il regolatore  $R^\circ(s)$  a tempo continuo del punto 2.2.

### ESERCIZIO 3

Si consideri il sistema termo-idraulico schematicamente descritto in figura. Si desidera effettuare il controllo del livello  $z$  e della temperatura  $T$  mediante le portate  $w_1$  e  $w_2$ .

Si assuma che la temperatura  $T_1$  del fluido in ingresso e la potenza termica  $\Phi$  entrante nel sistema per effetto dell'interazione con l'ambiente siano costanti. Si indichi con  $A$  l'area della sezione del serbatoio e con  $\rho$  la densità del liquido. Si trascurino gli scambi di lavoro meccanico e si supponga  $e_i \cong e = h = cT$ , dove  $c$  è il calore specifico. Poiché il liquido nel serbatoio è perfettamente miscelato si può ritenere  $T_2 \cong T$ .



3.1) Determinare il modello dinamico nonlineare del processo.

3.2) Determinare i legami tra le variabili in condizioni di equilibrio.

3.3) Ricavare il modello linearizzato nell'intorno di una arbitraria condizione di equilibrio.

3.4) Ponendo  $\rho = 1000$  [kg/m<sup>3</sup>],  $c = 4000$  [J/(kg K)],  $A = 1$  [m<sup>2</sup>],  $T_1 = 300$  [K],  $\Phi = 8 \cdot 10^5$  [J/s] e considerando l'equilibrio corrispondente a  $\bar{w}_1 = 10$  [kg/s],  $\bar{z} = 1$  [m], verificare che la matrice di

trasferimento tra l'ingresso  $u = \begin{bmatrix} \delta w_2 \\ \delta w_1 \end{bmatrix}$  e l'uscita  $y = \begin{bmatrix} \delta z \\ \delta T \end{bmatrix}$  è data da  $G(s) = \begin{bmatrix} -\frac{10^{-3}}{s} & \frac{10^{-3}}{s} \\ 0 & \frac{-2}{1+100s} \end{bmatrix}$ .

3.5) Progettare un opportuno disaccoppiatore per il sistema linearizzato.

3.6) Progettare i due regolatori sul sistema disaccoppiato in modo da avere per entrambi gli anelli di controllo una pulsazione critica  $\omega_c \geq 0.05$  e un margine di fase  $\varphi_m = 90^\circ$ .

## SOLUZIONE DELL' ESERCIZIO 1

1.1) La funzione d'anello può essere scritta come

$$L(s) = \frac{\rho}{s(s + 1/\tau)^2}$$

con  $\rho = k/\tau^2$ . Il baricentro dei poli (che si conserva al variare di  $\rho$ ) e il centro degli asintoti valgono  $x_b = x_a = -2/3\tau$ . Gli asintoti formano con l'asse reale angoli pari a multipli di  $60^\circ$ .

Il luogo dei poli in anello chiuso (diretto e inverso) è mostrato in Figura 1.

I punti di confluenza e diramazione sull'asse reale si ottengono come punti di minimo/massimo della funzione  $\gamma(x) = -x(x + 1/\tau)^2$ . Si trova che tali punti valgono  $x_1 = -1/\tau$  e  $x_2 = -1/3\tau$  e corrispondono entrambi a punti di diramazione, come si vede dalla figura.

1.2) Dal luogo inverso è evidente che non si può avere asintotica stabilità con  $k < 0$ . D'altra parte, il sistema perde l'asintotica stabilità per  $k \geq k_{\max}$ , dove  $k_{\max} = \tau^2 \rho_{\max}$  e  $\rho_{\max}$  è il valore di  $\rho$  per cui sul luogo diretto i due rami complessi attraversano l'asse immaginario. La posizione esatta di questo attraversamento non può essere facilmente determinata. Pertanto, al fine di valutare  $\rho_{\max}$ , conviene sfruttare la proprietà del baricentro per calcolare la posizione del terzo polo corrispondente a  $\rho_{\max}$ , e usare poi la regola della punteggiatura. Si trova che il terzo polo è in  $s = -2/\tau$  e quindi  $\rho_{\max} = 2/\tau^3$ . In conclusione,  $k_{\max} = \tau^2 \rho_{\max} = 2/\tau$ .

1.3) Il sistema descritto da  $G(s)$  ha poli con costante di tempo pari a  $\tau$ . È evidente dal luogo diretto che variando  $k$  è impossibile ottenere un polo dominante con parte reale inferiore a  $-1/3\tau$ . Perciò il sistema in anello chiuso è sempre almeno 3 volte più lento rispetto a  $G(s)$ .

1.4) Il compensatore ideale è dato da  $C^\circ(s) = -H(s)/G(s) = 5(1 + s\tau)$ , ma non è realizzabile. Può essere però approssimato da un compensatore statico  $C_1(s) = 5$  oppure da un compensatore dinamico  $C_2(s) = 5(1 + s\tau)/(1 + s\alpha\tau)$ , con  $\alpha \ll 1$ . Lo schema a blocchi è mostrato in Figura 2.

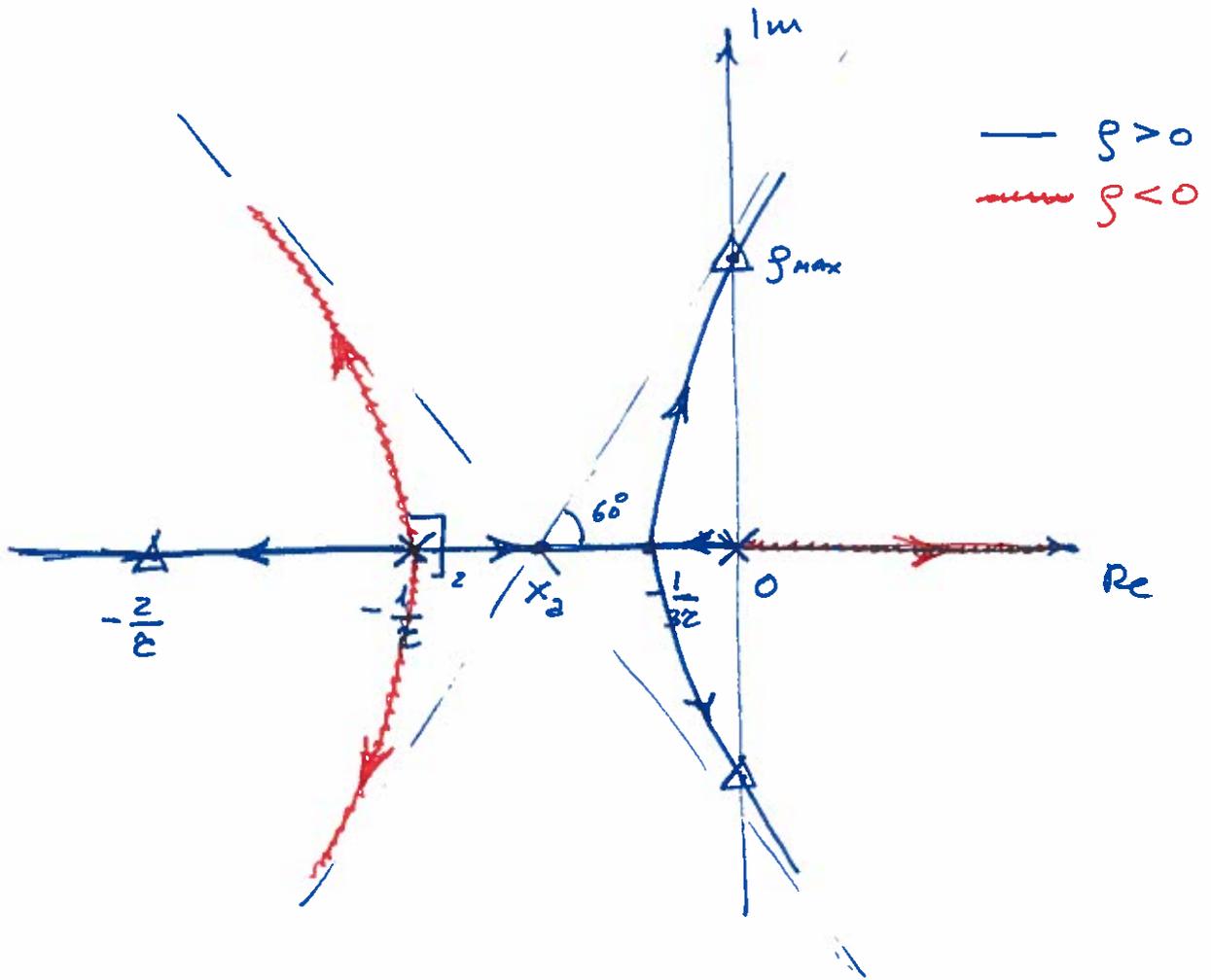


Figura 1

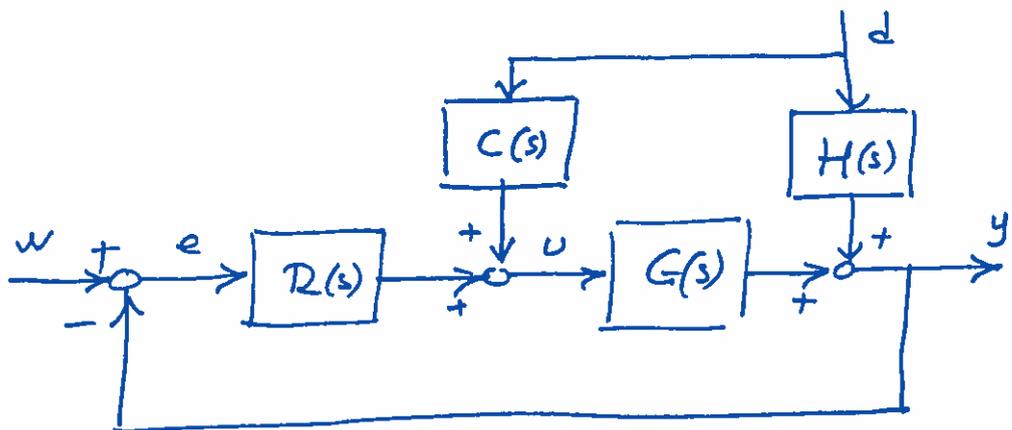


Figura 2

**SOLUZIONE DELL' ESERCIZIO 2**

**2.1)** Applicando la trasformata Zeta si ottiene  $R^*(z) = \frac{\beta}{z}$ .

**2.2)** Per il metodo EA, la trasformazione inversa è  $z = 1 + sT = 1 + s$ . Pertanto il regolatore a tempo continuo sarebbe  $R^\circ(s) = \frac{\beta}{1 + s}$ .

Per il metodo EI, la trasformazione inversa è  $z = 1/(1 - sT) = 1/(1 - s)$ . Pertanto il regolatore a tempo continuo sarebbe  $R^\circ(s) = \beta(1 - s)$ , che però non è realizzabile.

**2.3)** Per studiare il comportamento a tempo continuo del regolatore digitale conviene approssimarlo con la funzione di trasferimento  $\tilde{R}(s) = \frac{H_0(s)}{T} R^*(e^{sT}) \cong e^{-sT/2} R^*(e^{sT}) = \frac{\beta e^{-0.5s}}{e^s} = \beta e^{-1.5s}$ .

Si noti che l'approssimazione di  $H_0(s)/T$  con un ritardo di  $T/2$  risulta giustificata dal fatto che la pulsazione critica prescritta  $\omega_c = 0.4$  è molto più bassa della pulsazione  $\omega_s/2 = \pi$ .

La funzione d'anello approssimata è  $\tilde{L}(s) = \tilde{R}(s)G(s) = \frac{2\beta e^{-1.6s}}{s}$ , che presenta una pulsazione critica pari a  $\omega_c = 2\beta$ . Per avere  $\omega_c = 0.4$  occorre quindi scegliere  $\beta = 0.2$ .

**2.4)** Dall'espressione di  $\tilde{L}(s)$  si ricava una fase critica di  $\varphi_c = -90^\circ - 1.6 \cdot 0.4 \cdot 180/\pi \cong -126^\circ$  e quindi un margine di fase  $\varphi_m \cong 54^\circ$ .

L'errore a transitorio esaurito risulta nullo grazie alla presenza dell'integratore in  $\tilde{L}(s)$ .

**2.5)** Usando il regolatore a tempo continuo  $R^\circ(s) = \frac{\beta}{1 + s}$ , la funzione d'anello sarebbe

$$L^\circ(s) = R^\circ(s)G(s) = \frac{2\beta e^{-0.1s}}{s(1 + s)}$$

Con  $\beta = 0.2$ , la pulsazione critica è ancora  $\omega_c \cong 0.4$  (come ci si poteva aspettare) e la fase critica è  $\varphi_c \cong -90^\circ - \arctg(0.4) - 0.1 \cdot 0.4 \cdot 180/\pi \cong -114^\circ$ , con un margine di fase  $\varphi_m \cong 66^\circ$ . Come previsto dalla teoria, il margine di fase risulta leggermente superiore a quello garantito dal regolatore digitale, dato che non risente del ritardo  $T/2$  di discretizzazione.

L'errore a transitorio esaurito è ancora nullo grazie alla presenza dell'integratore nella funzione d'anello.

**SOLUZIONE DELL' ESERCIZIO 3**

**3.1)** Il modello nonlineare del processo si ricava dalle equazioni di conservazione della massa e dell'energia nel serbatoio. Con le ipotesi semplificative adottate si ottiene:

$$\dot{z}(t) = \frac{1}{\rho A} (w_1(t) - w_2(t))$$

$$\dot{T}(t) = \frac{1}{c\rho A z(t)} (\Phi + cw_1(t)(T_1 - T(t)))$$

**3.2)** All'equilibrio risulta  $\bar{w}_1 = \bar{w}_2$  e  $\bar{T} = T_1 + \frac{\Phi}{c\bar{w}_1}$ .

**3.3)** Il modello linearizzato è descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} \delta \dot{z}(t) &= \gamma (\delta w_1(t) - \delta w_2(t)) \\ \delta \dot{T}(t) &= -\alpha \delta T(t) + \beta \delta w_1(t) \end{aligned} \quad , \quad \alpha = \frac{\bar{w}_1}{\rho A \bar{z}} \quad , \quad \beta = \frac{T_1 - \bar{T}}{\rho A \bar{z}} \quad , \quad \gamma = \frac{1}{\rho A}$$

**3.4)** Trasformando con Laplace le equazioni del modello linearizzato si ottiene:

$$Z(s) = \frac{\gamma}{s} (W_1(s) - W_2(s))$$

$$T(s) = \frac{\beta}{s + \alpha} W_1(s)$$

Sostituendo i valori numerici  $\bar{T} = T_1 + \frac{\Phi}{c\bar{w}_1} = 320$ ,  $\alpha = \frac{\bar{w}_1}{\rho A \bar{z}} = 0.01$ ,  $\beta = \frac{T_1 - \bar{T}}{\rho A \bar{z}} = -0.02$  e

$\gamma = \frac{1}{\rho A} = 10^{-3}$ , la verifica della matrice di trasferimento  $G(s)$  è immediata.

**3.5)** Il sistema MIMO ha una struttura triangolare. Il disaccoppiatore "in avanti" è dato da

$$\Delta(s) = \begin{bmatrix} 1 & -G_{12}(s)/G_{11}(s) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**3.6)** La matrice di trasferimento del sistema disaccoppiato è

$$G'(s) = G(s)\Delta(s) = \begin{bmatrix} G_1'(s) & 0 \\ 0 & G_2'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{10^{-3}}{s} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{(1+100s)} \end{bmatrix}$$

Un regolatore per  $G_1'(s)$  che rispetta le specifiche potrebbe essere  $R_1'(s) = -\mu_1$ , con  $\mu_1 \geq 50$ .

Un regolatore per  $G_2'(s)$  che rispetta le specifiche potrebbe essere  $R_2'(s) = -\mu_2 \frac{1+100s}{s}$ , con  $\mu_2 \geq 0.025$ .