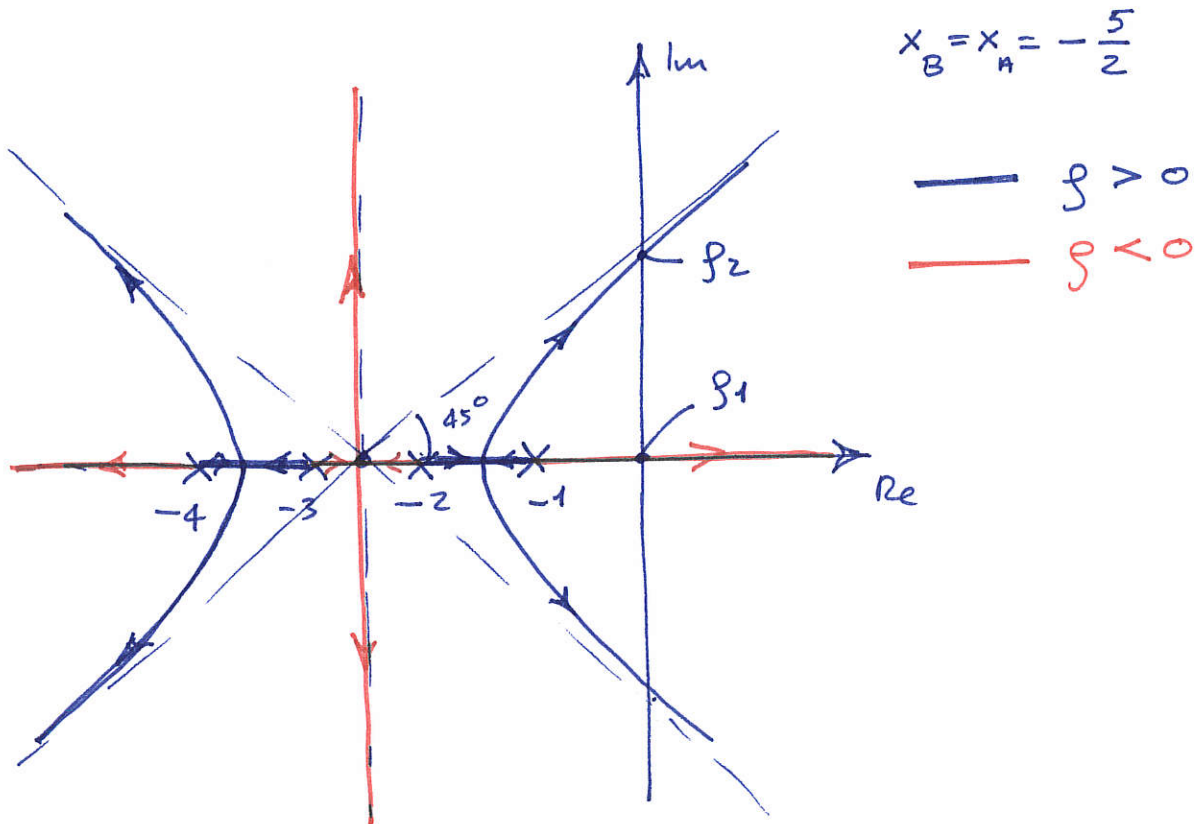


### ESERCIZIO 1

Si consideri un sistema con retroazione negativa e funzione d'anello  $L(s) = \frac{\rho}{(s+1)(s+2)(s+3)(s+4)}$ .

1.1) Disegnare l'andamento qualitativo del *luogo delle radici* diretto e inverso.



1.2) Per  $\rho < 0$ , determinare il minimo valore di  $\rho$  per cui il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile.

- COME SI VEDE DAL LUOGO INVERSO, L'ASINTOTICA STABILITÀ È ASSICURATA PER  $0 > \rho > \rho_1$ .

- CON LA REGOLA DELLA PUNTEGGIATURA SI HA:

$$|\rho_1| = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

- QUINDI RISULTA  $\rho_1 = -24$

1.3) Per  $\rho > 0$ , verificare che esiste un valore limite di  $\rho$  oltre il quale il sistema in anello chiuso è instabile. Valutare poi, anche in modo approssimato, tale valore di  $\rho$ .

- IL SISTEMA È INSTABILE PER  $\rho > \rho_2 > 0$

- PER CALCOLARE APPROSSIMATIVAMENTE  $\rho_2$  SI PUÒ ASSUMERE CHE, IN CORRISPONDENZA DI  $\rho_2$ , I RAMI COINCIDANO CON GLI ASINTOTI. PERCIÒ:

$$\rho_2 \approx \sqrt{\left(\frac{25}{4} + 1\right)\left(\frac{25}{4} + 4\right)\left(\frac{25}{4} + 9\right)\left(\frac{25}{4} + 16\right)} =$$

$$= \frac{1}{16} \sqrt{29 \cdot 41 \cdot 61 \cdot 89} \approx 159$$

- SI TRATTA DI UNA STIMA PER ECCESSO (CON MATLAB SI OTTERREBBE  $\rho_2 \approx 125$ )

1.4) Dire, giustificando la risposta, se esistono valori del parametro  $\rho$  per cui il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile e presenta un tempo di assestamento  $t_a \leq 1$ .

- PER AVERE  $t_a \leq 1$ , DOVREBBE ESISTERE  $\rho$  PER CUI TUTTI I POLI IN ANELLO CHIUSO  $s_i(\rho)$  ABBIANO  $|\operatorname{Re}(s_i(\rho))| \geq 5$  E  $\operatorname{Re}(s_i(\rho)) < 0$ , OVERO SIANO TUTTI A SINISTRA DELLA RETTA VERTICALE DI ASCISSA  $-5$ .

- DATA LA FORMA DEL L.D.R. CIÒ È CHIARAMENTE IMPOSSIBILE. QUINDI

$$\nexists \rho : t_a \leq 1$$

**ESERCIZIO 2**

Per controllare il sistema con funzione di trasferimento  $G(s) = \frac{40}{1+20s}$  si sia progettato il controllore a tempo continuo  $R(s) = \frac{0.01(1+20s)}{s}$ .

2.1) Si calcolino la pulsazione critica  $\omega_c$  e il margine di fase  $\varphi_m$  associati al sistema di controllo analogico risultante.

$$L(s) = R(s)G(s) = \frac{0.4}{s}$$

$$\omega_c = 0.4$$

$$\varphi_m = 90^\circ$$

2.2) Con il *metodo di Tustin* si determini un equivalente controllore digitale  $R^*(z)$ . A tale scopo si fissi il periodo di campionamento, scegliendo tra le due opzioni  $T=0.5$  oppure  $T=5$  quella che appare più adeguata.

- DEVE ESSERE  $\frac{2\pi}{50\omega_c} < T < \frac{2\pi}{5\omega_c} \implies 0.31 < T < 3.14$

- QUINDI, LA SCELTA ADEGUATA È  $T=0.5$ .

- CON IL METODO DI TUSTIN SI OTTIENE:

$$R^*(z) = R\left(\frac{z}{T} \frac{z-1}{z+1}\right) = \frac{0.01\left(1+80\frac{z-1}{z+1}\right)}{4\frac{z-1}{z+1}} =$$

$$= 0.0025 \frac{81z-79}{z-1} \approx 0.2025 \frac{z-0.9753}{z-1}$$

2.3) Considerando trascurabile il tempo di elaborazione necessario alla CPU per calcolare la variabile di controllo e supponendo di utilizzare come filtro anti-aliasing la funzione  $B(s) = \frac{1}{1+0.4s}$ , valutare il peggioramento complessivo delle prestazioni del controllore digitale rispetto a quello analogico.

- SI PUÒ RITENERE  $\omega_c^* \approx \omega_c = 0.4$

- PER EFFETTO DEL RITARDO DI DISCRETIZZAZIONE  $\frac{T}{2}$  E DEL FILTRO ANTI-ALIASING, CI SI ASPETTA UN PEGGIORAMENTO DEL MARGINE DI FASE:

$$\begin{aligned}\varphi_m^* &\approx 90^\circ - \omega_c^* \frac{T}{2} \frac{180^\circ}{\pi} - \arctg(0.4\omega_c^*) \approx \\ &\approx 90^\circ - 6^\circ - 9^\circ \approx 75^\circ\end{aligned}$$

- IN PRATICA, LE PRESTAZIONI DINAMICHE (E STATICHE) NON CAMBIANO.

2.4) Ricavare la funzione di trasferimento  $G^*(z)$  del sistema a segnali campionati corrispondente a  $G(s)$ .

$$G(s) = \frac{40}{1+20s}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{G(s)}{s}\right] = 40(1 - e^{-t/20}), \quad t \geq 0$$

$$y^*(k) = y(kT) = 40(1 - e^{-k/40}), \quad k \geq 0$$

$$Y^*(z) = \mathcal{Z}[y^*(k)] = 40 \frac{z}{z-1} - 40 \frac{z}{z - e^{-1/40}}$$

$$G^*(z) = Y^*(z) \frac{z-1}{z} = 40 - 40 \frac{z-1}{z - e^{-1/40}} \approx \frac{0.988}{z - 0.9753}$$

2.5) Verificare che, a seguito di una cancellazione polo/zero, la funzione di trasferimento d'anello  $L^*(z) = R^*(z)G^*(z)$  è quella di un integratore a tempo discreto. Sulla base di tale  $L^*(z)$ , valutare il tempo di assestamento del sistema di controllo digitale.

$$L^*(z) \approx \frac{0.2}{z-1} \quad \text{CONTIENE UN INTEGRATORE (POLO IN } z=1)$$

$$\varphi_{Ac}(z) \approx z - 1 + 0.2 = z - 0.8 \quad \Rightarrow \quad \text{POLO IN A.C. } z=0.8$$

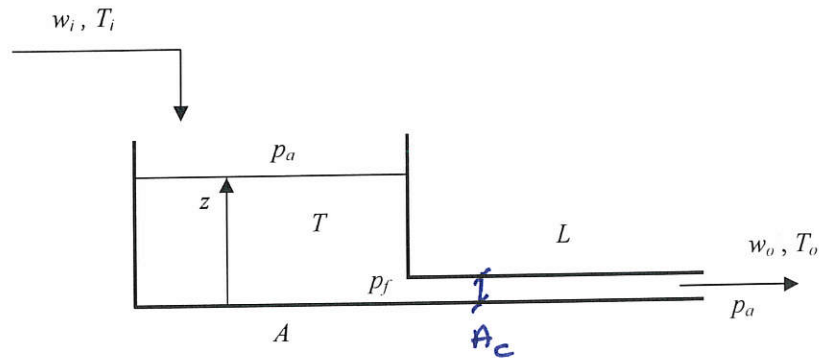
$$k_2 \approx \frac{-5}{\ln 0.8} \approx 22$$

$$t_2 \approx k_2 T = 22 \cdot 0.5 = 11$$

**ESERCIZIO 3**

Si consideri il processo termo-idraulico schematizzato in figura. Si indichi con  $\rho$  la densità del liquido, con  $c$  il suo calore specifico, con  $p_a$  la pressione atmosferica e con  $\bar{f}$  il coefficiente di attrito nella condotta.

Si supponga che il liquido nel serbatoio sia perfettamente miscelato e che siano trascurabili gli scambi termici del liquido con l'ambiente esterno e i contributi di lavoro meccanico. Infine, si approssimi l'energia totale del liquido con la sua entalpia, cioè, in termini specifici, si assuma  $e_t = h = cT$ . Le variabili di ingresso manipolabili sono la portata in ingresso  $w_i$  e la temperatura in ingresso  $T_i$ . Le variabili da controllare sono la portata in uscita  $w_o$  e la temperatura nel serbatoio  $T$ .



3.1) Si costruisca il modello dinamico nonlineare del sistema.

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{z} = \frac{1}{\rho A} (w_i - w_o) \\ \dot{w}_o = - \frac{\rho A_c g}{L} (0 - z) - \bar{f} w_o^2 = \frac{\rho A_c g}{L} z - \bar{f} w_o^2 \\ \dot{T} = \frac{1}{\rho A z} w_i (T_i - T) \end{array} \right.$$

- LA PRIMA EQUAZIONE DISCENDE DALLA CONS. DELLA MASSA NEL SERBATOIO.
- LA SECONDA DESCRIVE LA CONS. DELLA QUANTITÀ DI MOTO NELLA CONDOTTA.
- LA TERZA ESPRIME LA CONS. DI ENERGIA NEL SERBATOIO.

3.2) Si determinino i legami tra le variabili in condizioni di equilibrio.

$$\begin{aligned}\bar{w}_0 &= \bar{w}_i \\ \bar{z} &= \frac{\bar{p} \bar{w}_0^2 L}{\rho A_c g} \\ \bar{T} &= \bar{T}_i\end{aligned}$$

3.3) Si dimostri che il modello linearizzato intorno a una generica condizione di equilibrio può essere descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned}\delta \dot{z}(t) &= -\alpha \delta w_0(t) + \alpha \delta w_i(t) \\ \delta \dot{w}_0(t) &= \beta_1 \delta z(t) - \beta_2 \delta w_0(t) \\ \delta \dot{T}(t) &= -\gamma \delta T(t) + \gamma \delta T_i(t)\end{aligned}$$

Si ricavino inoltre i valori dei parametri positivi  $\alpha$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ ,  $\gamma$  in funzione dei parametri fisici e geometrici del sistema.

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{1}{\rho A} \\ \beta_1 &= \frac{\rho A_c g}{L}, \quad \beta_2 = 2 \frac{\rho}{L} \bar{w}_0 \\ \gamma &= \frac{\bar{w}_0}{\rho A \bar{z}}\end{aligned}$$

3.4) Dopo aver calcolato la matrice di trasferimento tra gli ingressi  $\begin{bmatrix} \delta w_i \\ \delta T_i \end{bmatrix}$  e le uscite  $\begin{bmatrix} \delta w_o \\ \delta T \end{bmatrix}$ , si discuta la possibilità di utilizzare uno schema di controllo decentralizzato.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha & 0 \\ \beta_1 & -\beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \gamma \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \dots = \begin{bmatrix} \frac{\alpha\beta_1}{s^2 + \beta_2 s + \alpha\beta_1} & 0 \\ 0 & \frac{\gamma}{s + \gamma} \end{bmatrix}$$

- IL SISTEMA LINEARIZZATO È NON INTERAGENTE.

⇒ È POSSIBILE UTILIZZARE UNO SCHEMA DECENTRALIZZATO PROGETTANDO I DUE REGOLATORI (DI PORTATA E TEMPERATURA) IN MODO INDIPENDENTE.

3.5) Considerando ora come uscita la temperatura  $T_o$  allo scarico, sotto quali condizioni è possibile affermare che  $T_o(t) = T(t - \tau)$ , con un opportuno valore di  $\tau$ ?

RISULTA  $T_o(t) = T(t - \tau)$ ,  $\tau = \frac{L_{PAC}}{w_o}$  SOLO SE:

- 1)  $w_o$  È COSTANTE
- 2) NON CI SONO SCAMBI DI ENERGIA CON L'AMBIENTE LUNGO LA CONDOTTA