

POLITECNICO
MILANO 1863

CONTROLLO DEI PROCESSI

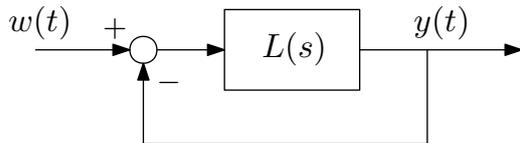
A.A. 2022-2023

19 GIUGNO 2023 - APPELLO

SOLUZIONI

Esercizio 1

Si consideri il sistema dinamico mostrato in figura, con funzione d'anello $L(s)$.



$$L(s) = \rho \frac{1 + \tau s}{s^2 + 2s + 2}$$

1.1) Considerando $\tau = 0$, si tracci il luogo delle radici e lo si utilizzi per analizzare la stabilità del sistema retroazionato al variare di ρ .

La funzione d'anello risulta

$$L(s) = \rho \frac{1}{s^2 + 2s + 2},$$

che può essere scritta nella forma

$$L(s) = \rho \frac{1}{\prod_{i=1}^n (s + p_i)}$$

con $n = 2$, $p_{1,2} = 1 \pm j$ e $m = 0$ (numero di zeri della funzione d'anello). Il luogo delle radici ha dunque le seguenti caratteristiche:

1. $n = 2$ rami, pari all'ordine del sistema.
2. $\nu = n - m = 2$ asintoti che si incrociano in

$$x_a = \frac{\sum z_i - \sum p_i}{\nu} = -1$$

e presentano un angolo base di $\Delta\theta = \frac{180^\circ}{\nu} = 90^\circ$.

Nel luogo diretto gli asintoti hanno angoli $\theta_{1,2} = \pm 90^\circ$ (multipli dispari dell'angolo base), mentre nel luogo inverso gli asintoti hanno angoli $\theta_1 = 0^\circ, \theta_2 = 180^\circ$ (multipli pari dell'angolo base).

3. Tutto l'asse reale appartiene al luogo inverso: infatti ogni punto dell'asse reale ha alla sua destra un numero pari di singolarità.
4. Nel luogo inverso, i rami confluiscono nel punto dell'asse reale caratterizzato da ascissa x_d , tale per cui:

$$x_d : \frac{d}{dx} \gamma(x_d) = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dx} (x^2 + 2x + 2) = 0 \quad \rightarrow \quad 2x + 2 = 0 \quad \rightarrow \quad x_d = -1$$

Con queste informazioni si può tracciare il luogo delle radici diretto come in Figura 1 e il luogo inverso come in Figura 2.

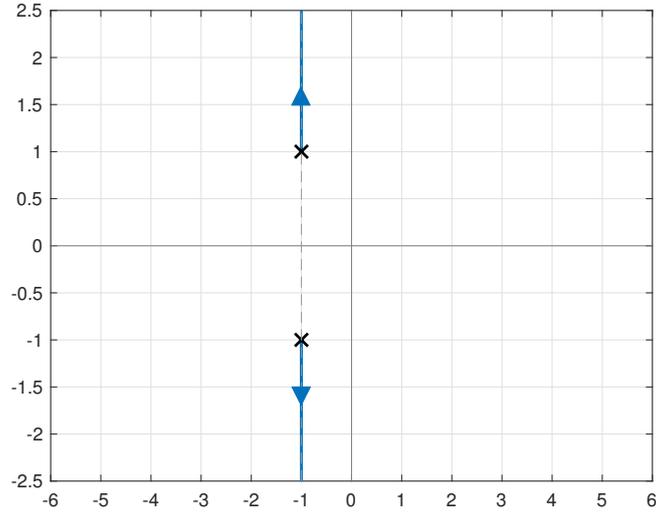


Figura 1: Luogo delle radici diretto.

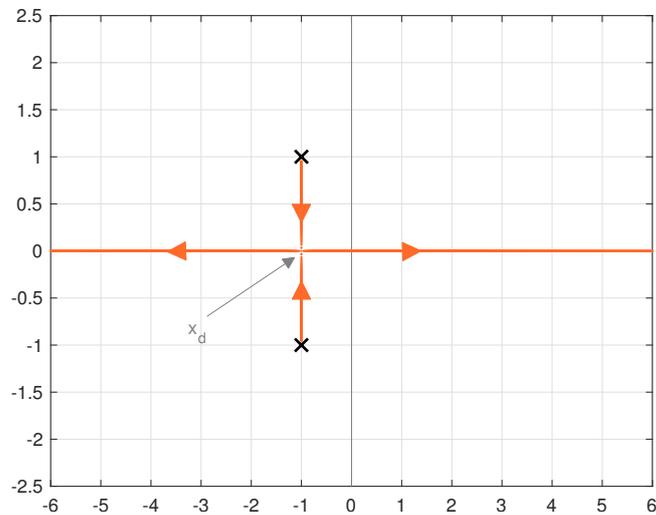


Figura 2: Luogo delle radici inverso.

Grazie ai luoghi tracciati è possibile affermare che:

1. Il sistema in anello chiuso è sempre asintoticamente stabile per $\rho > 0$.
2. Il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile per $\bar{\rho} < \rho < 0$, essendo $\bar{\rho}$ il valore del parametro per cui uno dei due poli ha parte reale nulla. Per ricavare tale valore, è sufficiente applicare al regola della punteggiatura al punto $\bar{s} = 0$:

$$|\bar{\rho}| = \frac{\prod_{i=1}^n |\bar{s} + p_i|}{1} = |p_1| \cdot |p_2| = 2.$$

Ricordando che si sta considerando il luogo inverso, risulta $\bar{\rho} = -2$.

1.2) Si indichino, se esistono, i valori del parametro ρ per cui l'uscita $y(t)$ del sistema, in risposta a uno scalino del riferimento $w(t) = \text{sca}(t)$, si assesta senza oscillazioni e sovraelongazioni a un valore finale costante.

Il comportamento desiderato si ottiene nel luogo inverso, quando i poli risultano entrambi reali. Questo accade per valori del parametro ρ

$$\bar{\rho} < \rho < \tilde{\rho},$$

essendo $\tilde{\rho}$ il valore per cui i poli risultano reali coincidenti in $\tilde{s} = -1$. Applicando la regola della punteggiatura in tale punto, si ottiene:

$$|\tilde{\rho}| = \frac{\prod_{i=1}^n |\tilde{s} + p_i|}{1} = |j| \cdot |-j| = 1.$$

Ricordando che si sta considerando il luogo inverso, risulta $\tilde{\rho} = -1$.

1.3) Quanto vale il minimo tempo di assestamento del sistema in anello chiuso ottenibile variando ρ ?

Osservando i luoghi diretto e inverso si riconosce come non sia possibile ottenere una parte reale per entrambi poli del sistema retroazionato inferiore a -1 . Il minimo tempo di assestamento del sistema risulta quindi:

$$t_{min} = \frac{5}{|Re_{max}|} = \frac{5}{1} = 5 \text{ secondi.} \quad (1)$$

1.4) Considerando ora $\tau = 0.5$ e $\rho > 0$, si discuta la possibilità di rendere il sistema in anello chiuso più veloce rispetto a quanto trovato in precedenza.

La funzione d'anello risulta ora

$$L(s) = \rho \frac{1 + 0.5s}{s^2 + 2s + 2}$$

la quale può essere scritta nella forma

$$L(s) = \rho^* \frac{\prod_{i=1}^m (s + z_i)}{\prod_{i=1}^n (s + p_i)}$$

con $\rho^* = 0.5\rho$, $m = 1$, $n = 2$, $z_1 = -2$, $p_{1,2} = 1 \pm j$. Il luogo delle radici ha dunque le seguenti caratteristiche:

1. $n = 2$ rami, pari all'ordine del sistema.
2. $\nu = n - m = 1$ asintoto con angolo base di $\Delta\theta = \frac{180^\circ}{\nu} = 180^\circ$. Nel luogo diretto, l'unico richiesto, l'asintoto ha angolo $\theta_1 = 180^\circ$ (multiplo dispari dell'angolo base).
3. Appartengono all'asse reale i punti caratterizzati da ascissa inferiore a -2 (ogni punto ha alla sua destra un numero dispari di singolarità).

Con queste informazioni si può tracciare il luogo delle radici diretto come in Figura 3.

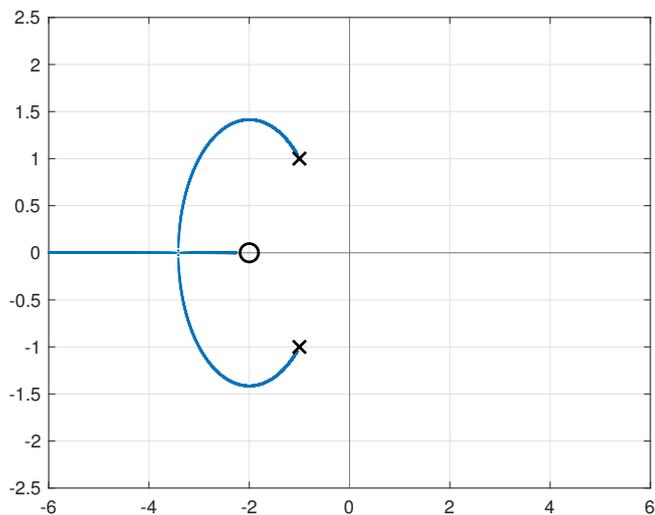


Figura 3: Luogo delle radici diretto.

L'analisi del luogo mostra come sia sempre ($\forall \rho > 0$) possibile ottenere tempi di assestamento inferiori a quello precedentemente individuato, visto che la parte reale dei poli in anello chiuso è sempre, in modulo, maggiore di 1. Il minimo tempo si ottiene in corrispondenza del valore di ρ^ per cui i rami si incontrano sull'asse reale e portano il sistema in anello chiuso ad avere due poli reali coincidenti.*

Esercizio 2

Si consideri il sistema dinamico lineare tempo invariante descritto dalle seguenti matrici

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 12 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2.1) Si calcoli la matrice di trasferimento $G(s)$ del sistema, verificando che ogni suo elemento corrisponda a un sistema dinamico del primo ordine.

La matrice di trasferimento si calcola applicando la definizione:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

ottenendo:

$$G(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{s+2} & \frac{10}{s+2} \\ \frac{1}{s+1} & \frac{2}{s+1} \end{bmatrix}$$

2.2) Nell'ipotesi di utilizzare uno schema di controllo decentralizzato, si valuti quali accoppiamenti ingresso/uscita è meglio selezionare in modo da ridurre le interferenze tra anelli di controllo.

Si analizzano gli accoppiamenti utilizzando il metodo della matrice dei guadagni relativi. In particolare, la matrice dei guadagni statici risulta:

$$G_0(s) = \begin{bmatrix} \mu_{11}(s) & \mu_{12}(s) \\ \mu_{21}(s) & \mu_{22}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

da cui si può ricavare il valore del parametro λ :

$$\lambda = \frac{\mu_{11}\mu_{22}}{\det G_0} = -\frac{2}{3} = -0.66 \rightarrow (1 - \lambda) = 1.66$$

Essendo il valore λ negativo, i migliori accoppiamenti risultano essere:

$$\{u_1, y_2\}, \{u_2, y_1\}$$

2.3) Disegnare lo schema a blocchi espanso (con tutte le funzioni di trasferimento in evidenza) del sistema di controllo decentralizzato, adottando gli accoppiamenti ingresso/uscita selezionati.

Lo schema a blocchi complessivo del sistema di controllo è riportato in Figura 4

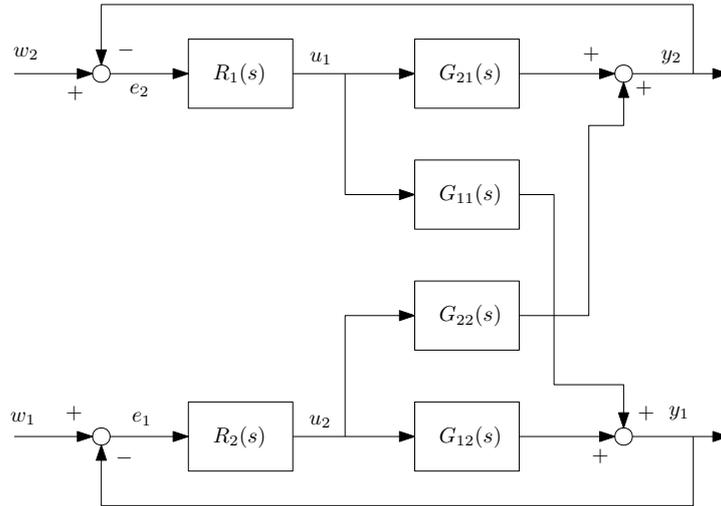


Figura 4: Schema a blocchi complessivo del sistema di controllo

2.4) Si consideri ora la disponibilità di un terzo ingresso, legato alle due uscite da:

$$G_3(s) = \begin{bmatrix} G_{13}(s) \\ G_{23}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{s+2} \\ \frac{5}{s+1} \end{bmatrix}.$$

Si indichi quali ingressi è meglio utilizzare in tal caso per controllare le due uscite del processo.

Anche in questo caso, l'analisi della matrice dei guadagni relativi, applicata alle ulteriori possibili combinazioni di ingressi $\{u_1, u_3\}$ e $\{u_2, u_3\}$, permette di individuare la coppia di variabili di controllo migliori. In particolare, il parametro λ_2 per la coppia di ingressi $\{u_1, u_3\}$ risulta

$$\lambda_2 = \frac{5}{4} = 1.25 \rightarrow (1 - \lambda_2) = -0.25,$$

mentre il parametro λ_3 per la coppia di ingressi $\{u_2, u_3\}$ vale

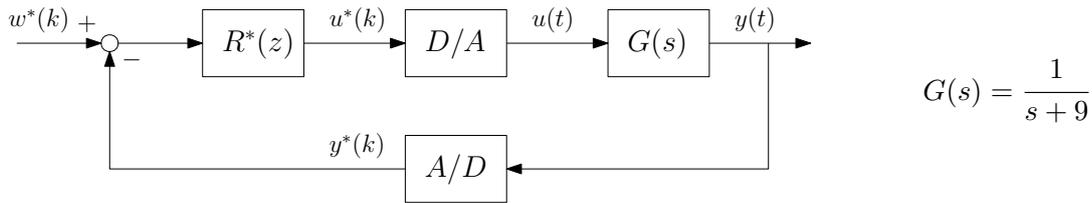
$$\lambda_3 = \frac{25}{23} = 1.09 \rightarrow (1 - \lambda_3) = -0.09.$$

Confrontando i valori di $(1 - \lambda)$, λ_2 e λ_3 si conclude come λ_3 sia quello più vicino al valore obiettivo unitario. È quindi possibile concludere come i migliori ingressi e i rispettivi accoppiamenti con le uscite del sistema siano

$$\{u_2, y_1\}, \{u_3, y_2\}.$$

Esercizio 3

Si consideri lo schema di controllo digitale a campionamento dell'uscita mostrato in figura.



3.1) Sapendo che l'equazione ricorsiva che descrive il regolatore è:

$$u^*(k) = u^*(k-1) + 2.5e^*(k) - 1.5e^*(k-1)$$

si ricavi l'espressione di $R^*(z)$, verificando che contenga un'azione di tipo integrale.

Applicando la trasformata \mathcal{Z} a entrambi i membri dell'equazione, considerando come da prassi condizioni iniziali nulle, si ottiene:

$$U(z)(1 - z^{-1}) = (2.5 - 1.5z^{-1})E(z) \rightarrow R^*(z) = \frac{E(z)}{U(z)} = \frac{2.5 - 1.5z^{-1}}{1 - z^{-1}} = \frac{2.5z - 1.5}{z - 1} = 2.5 \frac{z - 0.6}{z - 1}$$

La presenza dall'azione integrale è certificata dalla presenza del polo in $z = 1$.

3.2) Si ricavi l'espressione del sistema a segnali campionati $G^*(z)$, sapendo che il tempo di campionamento vale $T = 0.1$ secondi. Verificare che il tempo di assestamento di $G^*(z)$ sia coerente con quello di $G(s)$.

Per ricavare l'espressione del sistema a segnali campionati è possibile applicare il metodo della risposta allo scalino. In alternativa, è possibile ricordare che per un sistema a segnali campionati:

1. Il numero di poli a tempo discreto coincide con il numero di poli a tempo continuo $n = 1$.
2. Il guadagno della funzione di trasferimento si conserva, quindi $G^*(z = 1) = G(s = 0) = \frac{1}{9} \approx 0.1$.
3. Il polo del sistema a tempo discreto si trova in $z = e^{sT} \approx 0.4$, dove $s = -9$ è la posizione del polo del sistema a tempo continuo.
4. Il sistema a tempo discreto presenta un numero massimo di zeri pari a $n - 1 = 0$.

Dunque il sistema a segnali campionati risulta essere:

$$G^*(z) = \frac{0.066}{z - 0.4}$$

Il tempo di assestamento del sistema a tempo continuo $G(s)$ è:

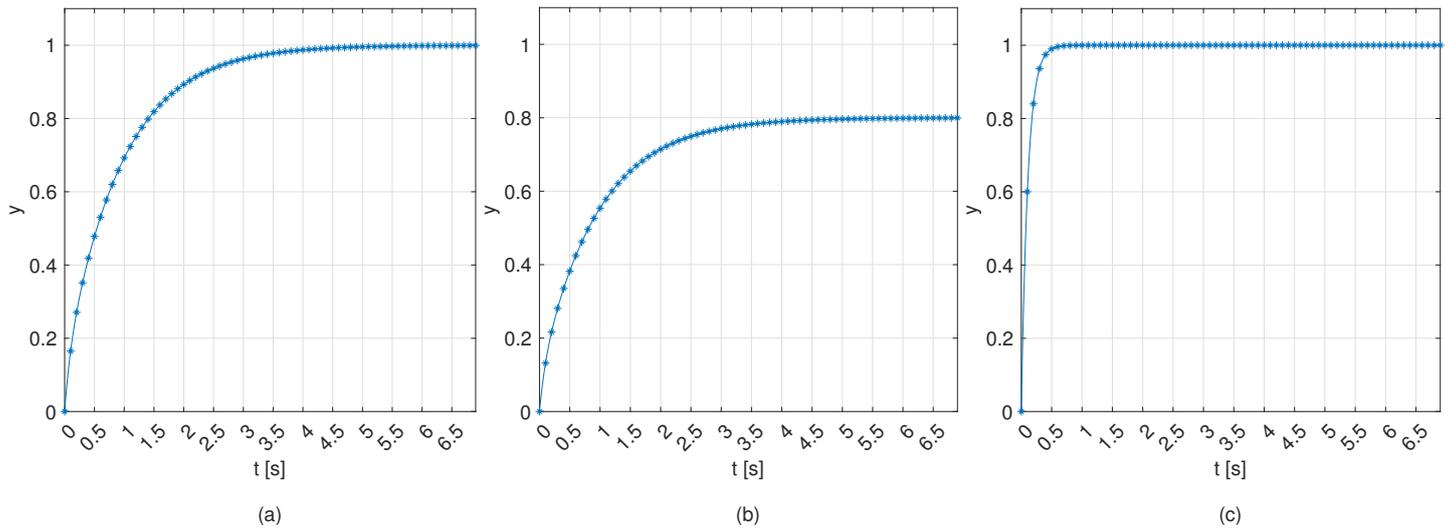
$$t_a = \frac{5}{9} = 0.56 \text{ secondi.}$$

Il tempo di assestamento del sistema a segnali campionati $G^*(z)$ è:

$$t_a^* = k_a \cdot T = \frac{5}{|\ln(0.4)|} \cdot 0.1 = 0.55 \text{ secondi,}$$

confermando la coerenza tra le due descrizioni del sistema dinamico da controllare.

3.3) Si dica, motivando opportunamente la risposta, quale dei seguenti grafici rappresenta la risposta del sistema in anello chiuso a uno scalino di riferimento $w^*(k) = sca^*(k)$.



La funzione d'anello del sistema di controllo a tempo discreto vale:

$$L^*(z) = 0.165 \frac{z - 0.6}{(z - 1)(z - 0.4)}$$

La presenza dell'azione integrale (a tempo discreto) garantisce guadagno unitario alla funzione di sensibilità complementare. Dunque il valore finale dell'uscita deve coincidere con l'ampiezza del riferimento. Per questo è possibile scartare la risposta rappresentata nel grafico (b). Il polinomio caratteristico del sistema in anello chiuso vale:

$$\phi^* = 1 + L(z) = (z - 1)(z - 0.4) + 0.165(z - 0.6) = z^2 - 1.4z + 0.4 + 0.165z - 0.099 = z^2 - 1.24z + 0.301,$$

le cui radici sono

$$z_{1,2} = 0.62 \pm \sqrt{0.38 - 0.301} \approx \begin{cases} 0.34 \\ 0.9 \end{cases}$$

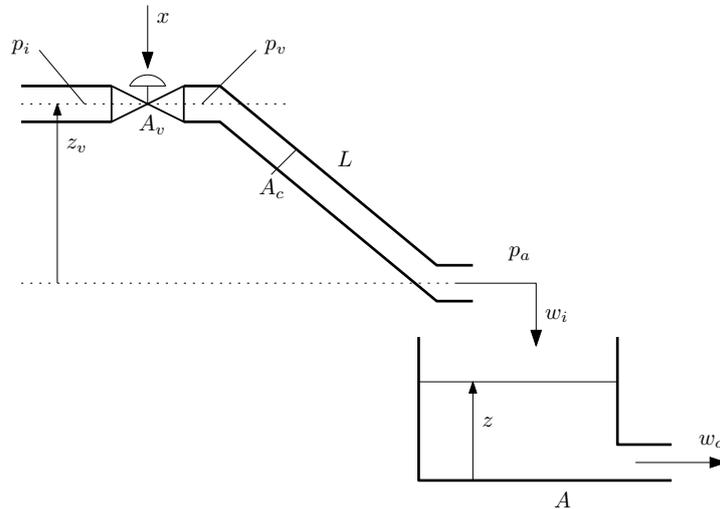
Il polo dominante del sistema in anello chiuso è $z_2 = 0.9$, a cui è associato il tempo di assestamento:

$$t_a^* = k_a \cdot T = \frac{5}{|\ln(0.9)|} \cdot 0.1 = 4.75 \text{ secondi.}$$

Quindi, il grafico corretto risulta essere quello in figura (a).

Esercizio 4

Si consideri il processo idraulico schematizzato in figura. Si supponga che la valvola abbia un comportamento lineare rispetto alla variabile x . Si desideri controllare il livello z nel serbatoio usando come variabile di controllo la posizione x della valvola (normalizzata tra 0 e 1). Le pressioni p_i e p_a siano costanti e la portata di deflusso w_o sia considerata come un disturbo misurabile. Si indichi con ρ la densità del liquido e con g l'accelerazione di gravità. Il parametro A_v rappresenta la sezione massima di apertura della valvola, A_c è l'area della sezione interna della condotta e A è l'area di base del serbatoio, supposto cilindrico.



4.1) Verificare che il modello dinamico nonlineare che descrive il processo è descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned}\dot{z}(t) &= aw_i(t) + bw_o(t) \\ \dot{w}_i(t) &= c(x(t))w_i^2(t) + d\end{aligned}$$

con un'opportuna definizione dei parametri a, b, d e della funzione $c(x)$.

Modello valvola

$$w_i = kA_v x \sqrt{\rho(p_i - p_v)} \quad \rightarrow \quad p_v = p_i - \frac{1}{\rho} \left(\frac{w_i}{kA_v x} \right)^2 \quad (2)$$

Modello condotta

$$\dot{w}_i = -\frac{\rho A_c g}{L} (z_L^* - z_v^*) - \bar{f} w_i^2 \quad (3)$$

Dove $z_L^* = z_L + \frac{p_a}{\rho g} = 0$ è il valore l'altezza di carico allo sbocco della condotta, che risulta nullo considerando, senza perdere generalità, $p_a = 0$ e $z_L = 0$ per come è stato scelto il sistema di riferimento dell'altezza geodetica. L'altezza di carico z_v^* è invece:

$$z_v^* = z_v + \frac{p_v}{\rho g}.$$

Sostituendo i valori di z_v^* , z_L^* e il modello della valvola (2) all'interno di (3) si ottiene:

$$\dot{w}_i = \frac{\rho A_c g}{L} z_v + \frac{A_c}{L} p_i - \left(\frac{A_c}{L \rho k^2 A_v^2 x^2} + \bar{f} \right) w_i^2 \quad (4)$$

Modello serbatoio

$$\dot{z} = \frac{1}{\rho A} (w_i - w_o) \quad (5)$$

Le equazioni (4) e (5) costituiscono il modello dinamico del sistema, con variabili di stato z e w_i . Confrontandolo con la struttura proposta si verifica che:

$$a = -b = \frac{1}{\rho A} \quad (6)$$

$$d = \frac{A_c}{L}(\rho g z_v + p_i) \quad (7)$$

$$c(x) = -\left(\frac{A_c}{L\rho k^2 A_v^2 x^2} + \bar{f}\right) \quad (8)$$

4.2) Supponendo di linearizzare il modello intorno a un generico stato di equilibrio, ricavare i valori dei parametri $\alpha, \beta, \gamma, \theta$ del seguente modello linearizzato:

$$\begin{aligned} \delta \dot{z}(t) &= \alpha \delta w_i(t) + \beta \delta w_0(t) \\ \delta \dot{w}_i(t) &= \gamma \delta w_i(t) + \theta \delta x(t) \end{aligned}$$

I valori dei coefficienti del modello risultano:

$$\begin{aligned} \alpha &= a &= \frac{1}{\rho A} \\ \beta &= b &= -\frac{1}{\rho A} \\ \gamma &= 2c(\bar{x})\bar{w}_i &= -2\bar{w}_i \left(\frac{A_c}{L\rho k^2 A_v^2 \bar{x}^2} + \bar{f} \right) \\ \theta &= \frac{dc(\bar{x})}{dx} \bar{w}_i^2 &= \frac{2A_c \bar{w}_i^2}{L\rho k^2 A_v^2 \bar{x}^3} \end{aligned}$$

4.3) Disegnare lo schema a blocchi complessivo del sistema di controllo di livello basato sul modello linearizzato.

Lo schema a blocchi complessivo del sistema di controllo è riportato in Figura 5

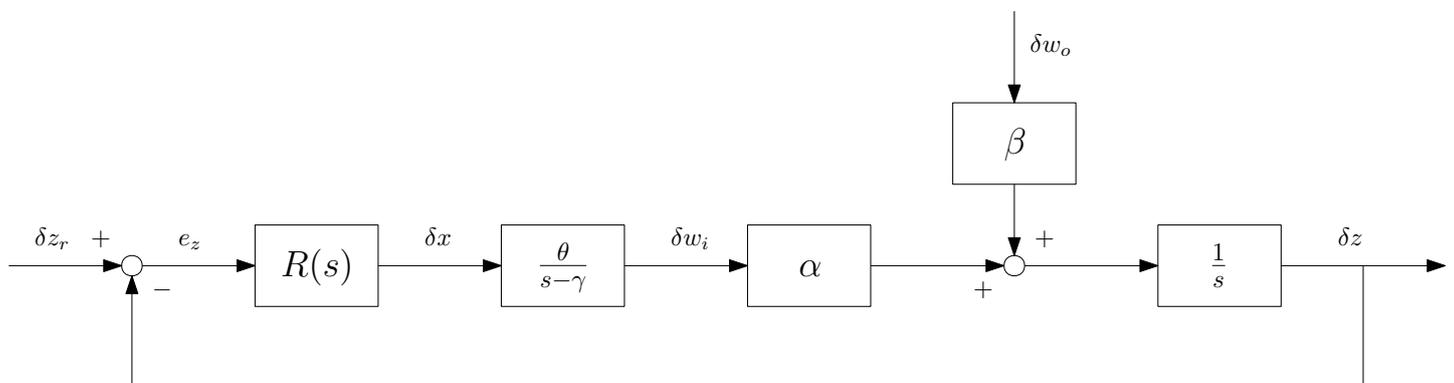


Figura 5: Schema a blocchi complessivo del sistema di controllo

4.4) Discutere come si potrebbe procedere per progettare il regolatore $R(s)$ in anello chiuso e il compensatore $C(s)$ in anello aperto del disturbo w_o . In particolare, valutare se i guadagni di $R(s)$ e $C(s)$ debbano essere positivi o negativi, interpretando il risultato in base alla fisica del processo.

Progetto di $R(s)$

Il progetto di $R(s)$ è fatto su $G(s) = \frac{\alpha\theta}{s(s-\gamma)} = \frac{-\frac{\alpha\theta}{\gamma}}{s(1-\frac{s}{\gamma})}$, dove $\alpha > 0$, $\theta > 0$, $\gamma < 0$ e $\beta > 0$. Il regolatore deve presentare le seguenti caratteristiche:

- **Guadagno positivo**, coerentemente con il segno del guadagno di $G(s)$. L'interpretazione fisica del processo conferma il risultato trovato, infatti a fronte di un errore di livello positivo $e_z > 0$ è necessario aprire la valvola $\delta x > 0$ per aumentare la portata entrante δw_i nel serbatoio.
- **Un azione integrale**, per potere fare fronte in maniera robusta al disturbo δw_o
- **Due zeri**. Il primo, in posizione $s = \gamma$ può essere utilizzato per cancellare il polo del sistema (asintoticamente stabile) e il secondo per garantire l'asintotica stabilità del sistema in anello chiuso.

Progetto di $C(s)$

Lo schema a blocchi del sistema di controllo comprendente il compensatore del disturbo è mostrato in Figura 6.

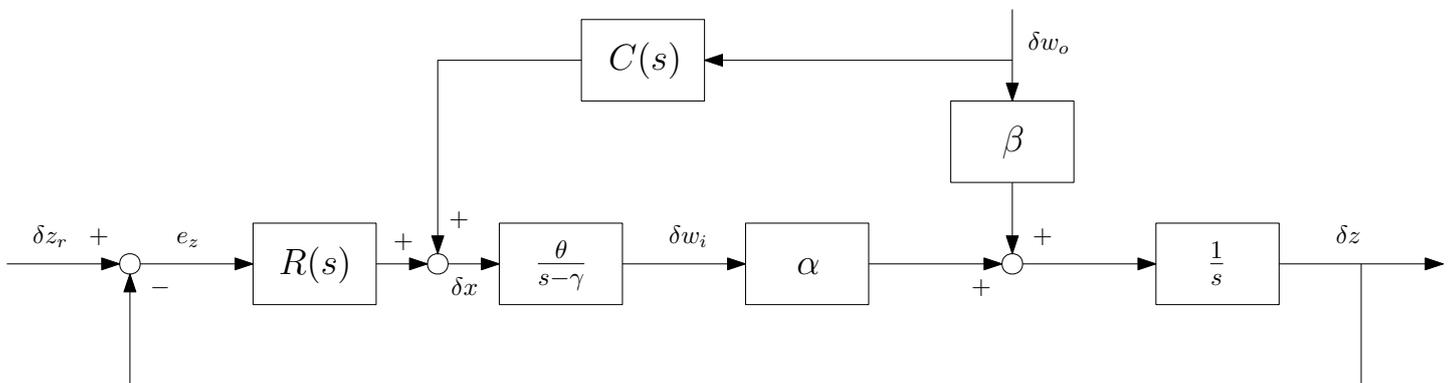


Figura 6: Schema di controllo comprendente il compensatore del disturbo $C(s)$.

Grazie allo schema è possibile ricavare l'espressione del compensatore ideale:

$$C^0(s) = -\frac{\beta}{\alpha\theta}(s - \gamma)$$

che risulta non realizzabile. Per poterlo implementare è possibile approssimarlo in due modi differenti:

1. Realizzando un compensatore statico $C(s) = \frac{\beta\gamma}{\alpha\theta}$.
2. Aggiungendo un polo ad alta frequenza $C(s) = \frac{\beta\gamma}{\alpha\theta} \cdot \frac{1 - \frac{s}{\gamma}}{1 + \tau s}$, con $\tau \ll -\frac{1}{\gamma}$

In entrambi i casi l'interpretazione fisica del processo conferma il **segno del positivo del guadagno del compensatore**. Infatti, a fronte di un incremento della portata in uscita dovuta al disturbo, è necessario aprire la valvola ($\delta x > 0$) per aumentare la portata entrante δw_i nel serbatoio.