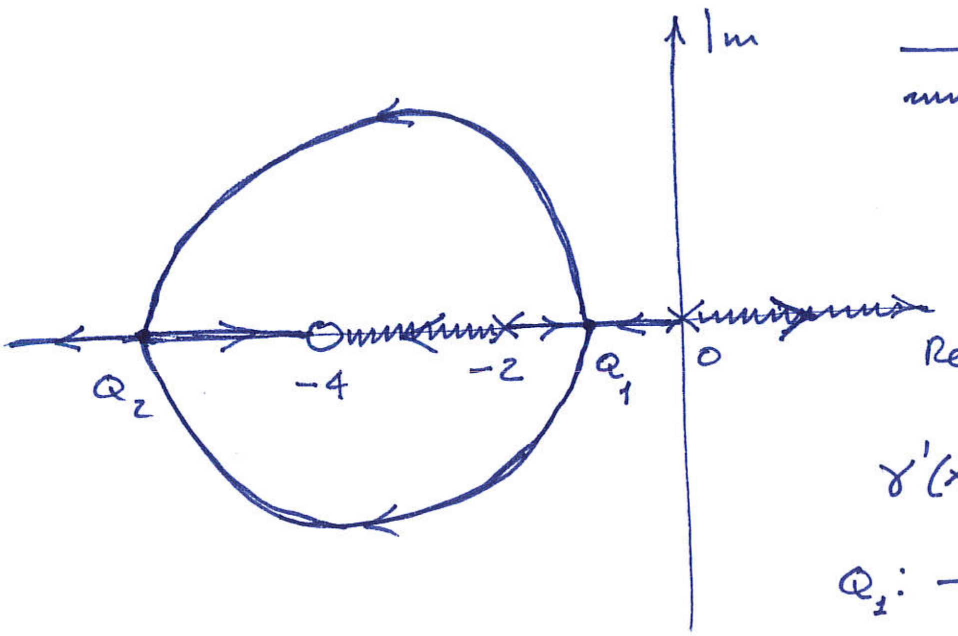
## ESERCIZIO 1

Si consideri un sistema con retroazione negativa e funzione d'anello $L(s) = \dfrac{\rho(s+4)}{s(s+2)}$.

**1.1)** Disegnare l'andamento qualitativo del *luogo delle radici* diretto e inverso.




—— $\rho > 0$ L.D.

~~~~ $\rho < 0$ L.I.

$$\gamma(x) = -\frac{x^2+2x}{x+4}$$

$$\gamma'(x) = -\frac{x^2+8x+8}{(x+4)^2}$$

$$\gamma'(x) = 0 \Longrightarrow x_{1,2} = -4 \pm \sqrt{8}$$

$$Q_1: -4+\sqrt{8} \simeq -1.17$$

$$Q_2: -4-\sqrt{8} \simeq -6.82$$

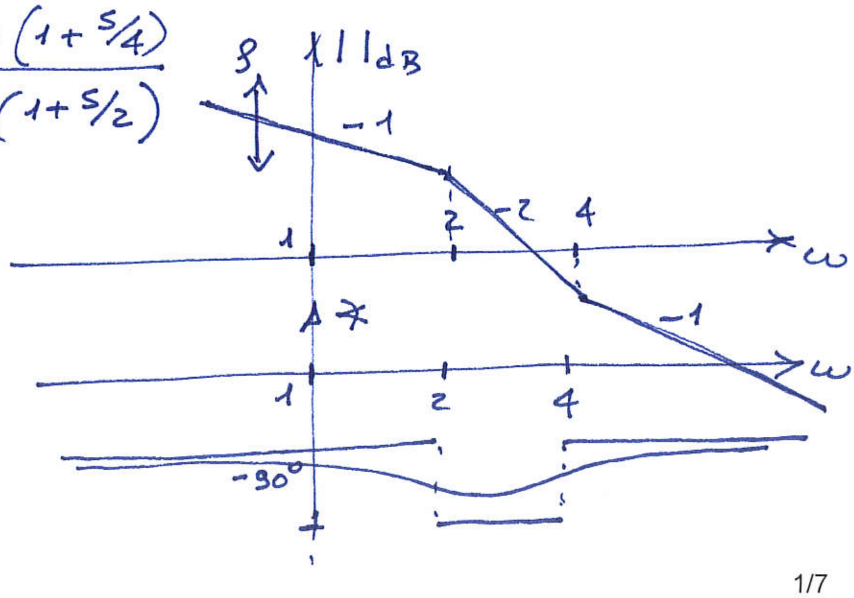
**1.2)** Attraverso il luogo delle radici, determinare i valori del parametro $\rho$ per cui il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile e verificare il risultato attraverso il criterio di Bode.

- DAL LUOGO DELLE RADICI SI VEDE CHE

AS. STAB $\Longleftrightarrow$ $\rho > 0$

- PER APPLICARE IL CRITERIO DI BODE, SI CONSIDERI:

$$L(s) = \frac{2\rho\left(1+s/4\right)}{s\left(1+s/2\right)}$$




$\mu = 2\rho > 0$

$\varphi_m > 0^\circ$ SEMPRE

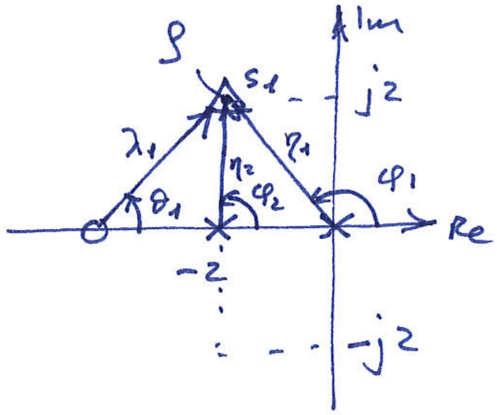
$\Downarrow$

AS. STAB.
~~~~

**1.3)** Dimostrare che i punti $s_{1,2} = -2 \pm j2$ appartengono al luogo e determinare il corrispondente valore di $\rho$.

È SOFFICIENTE VERIFICARLO PER $s_1 = -2 + j2$

- METODO GEOMETRICO




$$-\varphi_1 - \varphi_2 + \vartheta_1 = -135^\circ - 90^\circ + 45^\circ =$$
$$= -180^\circ$$

MULTIPLO DISPARI DI $180^\circ$

OK

$$\rho = \frac{\eta_1 \cdot \eta_2}{\lambda_1} = \frac{2\sqrt{2} \cdot 2}{2\sqrt{2}} = 2$$

- METODO ALGEBRICO

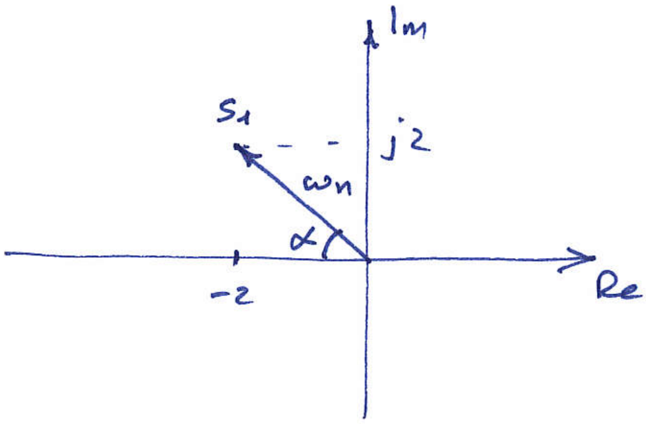
$$\varphi_{AC}(s) = s^2 + 2s + \rho(s+4)$$

$$\varphi_{AC}(-2+j2) = (-2+j2)^2 + 2(-2+j2) +$$
$$+ \rho(2+j2) =$$
$$= -4 - j4 + \rho(2+j2) = 0$$

PER $\rho = \dfrac{4+j4}{2+j2} = 2$ REALE

OK

**1.4)** Con tale valore di $\rho$, calcolare il tempo di assestamento e l'ampiezza della sovraelongazione della variabile controllata in risposta a uno scalino unitario del riferimento.




$$\omega_n = 2\sqrt{2}$$
$$\alpha = 45^\circ$$
$$\xi = \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

- QUINDI:

$$t_a \simeq \frac{5}{\xi\omega_n} = \frac{5}{2} = 2.5$$

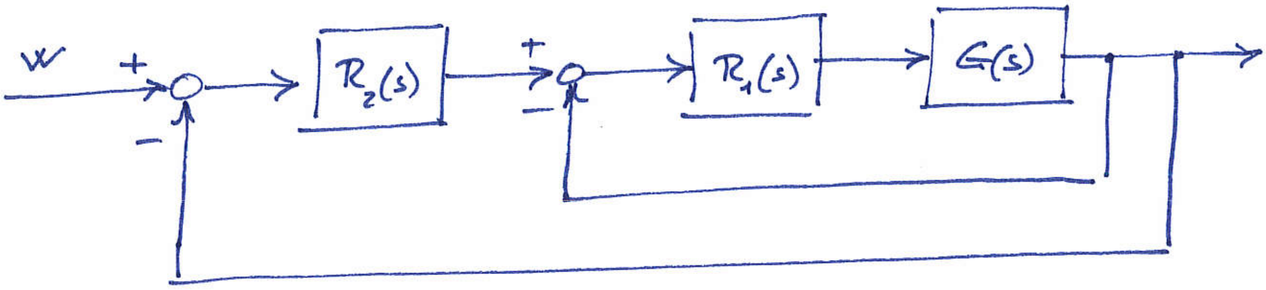
$$\Delta = e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \simeq 0.04$$

## ESERCIZIO 2

Si consideri il sistema a tempo continuo con ingresso $u$ e uscita $y$ descritto dalla funzione di trasferimento:

$$G(s)=\frac{0.5}{s-10}$$

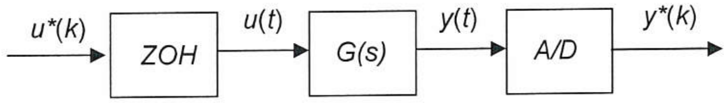
**2.1)** Supponendo di voler realizzare un sistema di controllo analogico per stabilizzare tale sistema e nel contempo ottenere determinate prestazioni statiche e dinamiche, si spieghi in cosa consisterebbe il progetto con *schema in cascata*.




$R_1(s)$ SERVE A STABILIZZARE

$R_2(s)$ SERVE AD ASSICURARE LE PRESTAZIONI DESIDERATE

**2.2)** Si faccia riferimento allo schema in figura, dove $G(s)$ è la funzione precedentemente considerata. Supponendo che i due convertitori operino con periodo $T=0.1$, ricavare la funzione di trasferimento $G^*(z)$ tra l'ingresso $u^*(k)$ e l'uscita $y^*(k)$.




- CON IL METODO 1:

$$Y(s)=\frac{0.5}{s(s-10)}=-0.05\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s-10}\right)$$

$$y(t)=-0.05\left(1-e^{10t}\right),\quad t\geq 0$$

$$y^*(k)=-0.05\left(1-e^{k}\right),\quad k\geq 0$$

$$Y^*(z)=-0.05\left(\frac{z}{z-1}-\frac{z}{z-e}\right)$$

$$G^*(z)=\frac{z-1}{z}Y^*(z)=-0.05\left(1-\frac{z-1}{z-e}\right)=\frac{0.05(e-1)}{z-e}\simeq\frac{0.086}{z-2.7}$$

**2.3)** Sulla base della funzione $G^*(z)$ ricavata al punto precedente, progettare un regolatore digitale puramente proporzionale, cioè con $R^*(z) = \mu$, per stabilizzare il sistema. Determinare in particolare l'intervallo di valori di $\mu$ ammissibili.

$$L(z) = \frac{0.05\mu(e-1)}{z-e} = \frac{\rho}{z-e} \quad , \quad \rho = 0.05\mu(e-1)$$

$$\varphi_{AC}(z) = z - e + \rho = 0$$

- POLO IN A.C.: $z = e - \rho$

AS. STAB $\Longleftrightarrow |e-\rho| < 1 \Longleftrightarrow e-1 < \rho < e+1$

$$\Updownarrow$$

$$20 < \mu < 20\,\frac{e+1}{e-1}$$

**2.4)** Per progettare il regolatore digitale $R^*(z)$ si usi ora il metodo ad *assegnamento del modello* usando come modello di riferimento la funzione $F(z) = \dfrac{\alpha}{z}$, con l'unico obiettivo di stabilizzare il sistema.

$$G^*(z) = \frac{0.05(e-1)}{z-e} \qquad F(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{\alpha}{z}$$

- PER EVITARE LA CANCELLAZIONE "CRITICA" È NECESSARIO CHE:

$$A(e) = B(e) \Longrightarrow e = \alpha \Longrightarrow F(z) = \frac{e}{z}$$

- IL REGOLATORE È:

$$R^*(z) = \frac{1}{G^*(z)} \cdot \frac{B(z)}{A(z)-B(z)} = \frac{z-e}{0.05(e-1)} \cdot \frac{e}{z-e} = \frac{20e}{e-1} \simeq 31.6$$

**2.5)** In corrispondenza del regolatore $R^*(z)$ progettato al punto precedente, si valuti la precisione statica in risposta a un riferimento a scalino. Si spieghi inoltre come essa si potrebbe migliorare mediante una scelta diversa della funzione $F(z)$.

$$L(z) = R^*(z)\,G^*(z) = \frac{e}{z-e} \quad , \quad L(1) = \frac{e}{1-e}$$

$$e(\infty) = \frac{1}{1+L(1)} = \frac{1}{1+\frac{e}{1-e}} = 1-e$$

- MIGLIORI PRESTAZIONI STATICHE CON $F(z) = \dfrac{\alpha z + \beta}{z^2}$

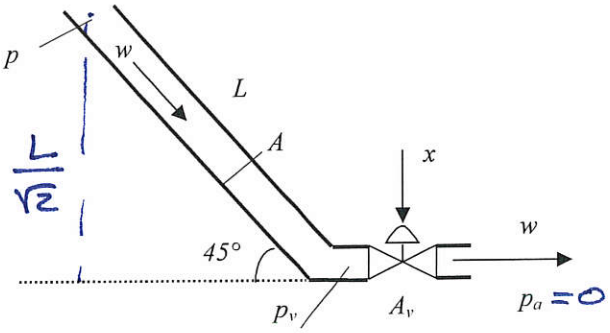
$$\begin{cases} A(e) = B(e) \\ A(1) = B(1) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha e + \beta = e^2 \\ \alpha + \beta = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha = 1+e \\ \beta = -e \end{cases}$$

GARANTISCE $e(\infty) = 0$ GRAZIE ALL'AZIONE INTEGRALE

$$R^*(z) = \frac{20}{e-1} \cdot \frac{(1+e)z - e}{z-1}$$

## ESERCIZIO 3

Si consideri il sistema idraulico in figura, costituito da una condotta inclinata di lunghezza $L$ e sezione costante $A$, percorsa da un liquido con densità $\rho$. La portata $w$ è regolata attraverso la valvola (lineare). La pressione $p_a$ in uscita dalla valvola è quella atmosferica. La pressione $p$ a monte è da considerare come un disturbo.




**3.1)** Trascurando l'attrito nella condotta, verificare che il modello dinamico nonlineare del processo può essere scritto nella forma:

$$\dot{w}(t) = -\alpha \left( \frac{w(t)}{x(t)} \right)^2 + \beta p(t) + \gamma$$

dove $\alpha$, $\beta$ e $\gamma$ sono opportune costanti da determinare in funzione dei parametri fisici e geometrici del sistema.

- VALVOLA: $w = k A_v x \sqrt{\rho p_v} \implies p_v = \frac{w^2}{k^2 A_v^2 x^2 \rho}$

- CONS. Q. DI MOTO NELLA CONDOTTA:

$$\dot{w} = -\frac{\rho A g}{L}\left(z_L^* - z_0^*\right)$$

$$z_L^* = \frac{p_v}{\rho g}, \quad z_0^* = \frac{p}{\rho g} + \frac{L}{\sqrt{2}}$$

- PERCIÒ

$$\dot{w} = -\underbrace{\left(\frac{A}{L k^2 A_v^2 \rho}\right)}_{\alpha}\left(\frac{w}{x}\right)^2 + \underbrace{\frac{A}{L}}_{\beta} p + \underbrace{\left(\frac{\rho A g}{\sqrt{2}}\right)}_{\gamma}$$

**3.2)** Si determinino le unità di misura (nel Sistema Internazionale) dei parametri $\alpha$, $\beta$ e $\gamma$ e si controlli la coerenza dimensionale del modello introdotto al punto precedente.

$$\alpha \sim [kg^{-1}], \quad \beta \sim [m], \quad \gamma \sim \left[\frac{kg}{s^2}\right]$$

$$\dot{w} \sim \left[\frac{kg}{s^2}\right], \quad \left(\frac{w}{x}\right)^2 \sim \left[\frac{kg^2}{s^2}\right], \quad p \sim \left[\frac{N}{m^2}\right] = \left[\frac{kg}{m\,s^2}\right]$$

$$\alpha \left(\frac{w}{x}\right)^2 \sim \left[\frac{kg}{s^2}\right] \qquad \beta p \sim \left[\frac{kg}{s^2}\right]$$

$\Longrightarrow$ TUTTI I TERMINI DELL'EQUAZIONE SONO MISURATI IN $\left[\frac{kg}{s^2}\right]$

**3.3)** Si ricavi il modello linearizzato intorno a una generica condizione di equilibrio caratterizzata dai valori costanti $\bar{x}$, $\bar{p}$ e $\bar{w}$.

$$\delta \dot{w} = -2\alpha \frac{\bar{w}}{\bar{x}^2} \delta w + \beta \delta p + 2\alpha \frac{\bar{w}^2}{\bar{x}^3} \delta x$$

(ALL'EQUILIBRIO $\alpha \frac{\bar{w}^2}{\bar{x}^2} = \beta \bar{p} + \gamma$)

**3.4)** Si dimostri che il modello linearizzato è asintoticamente stabile e la sua costante di tempo è pari a $\tau = \dfrac{\bar{w}L}{\sqrt{2}A\left(\sqrt{2}(\bar{p} - \cancel{p_a}) + \rho g L\right)}$.

$\alpha > 0$

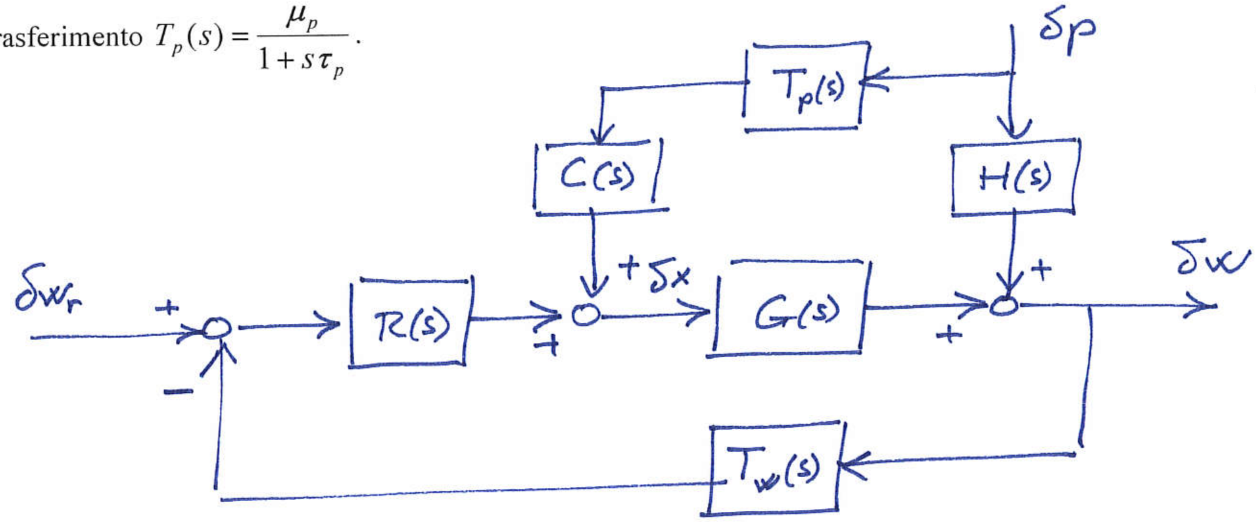
- L'UNICO AUTOVALORE È $\lambda = -2\alpha \frac{\bar{w}}{\bar{x}^2} < 0 \Longrightarrow$ AS. STAB.

- LA COSTANTE DI TEMPO È

$$\tau = -\frac{1}{\lambda} = \frac{\bar{x}}{2\alpha \bar{w}} = \frac{1}{2\bar{w}} \frac{\bar{w}^2}{\beta \bar{p} + \gamma} = \frac{\bar{w}}{\frac{2A}{L}\bar{p} + \sqrt{2}\rho A g} =$$

$$= \frac{\bar{w}L}{\sqrt{2}A\left(\sqrt{2}\,\bar{p} + \rho g L\right)} \qquad \text{OK}$$

**3.5)** Si disegni lo schema a blocchi del sistema di regolazione in anello chiuso della portata, completo di un compensatore in anello aperto del disturbo, supponendo che il trasduttore di portata sia descritto dalla funzione di trasferimento $T_w(s) = \dfrac{\mu_w}{1+s\tau_w}$ e il trasduttore di pressione sia descritto dalla funzione di trasferimento $T_p(s) = \dfrac{\mu_p}{1+s\tau_p}$.




$$G(s) = \frac{2\alpha \dfrac{\bar{w}^2}{\bar{x}^3}}{s + 2\alpha \dfrac{\bar{w}}{\bar{x}^2}} \quad , \quad H(s) = \frac{\beta}{s + 2\alpha \dfrac{\bar{w}}{\bar{x}^2}}$$

**3.6)** Discutere le possibili limitazioni nel progetto del regolatore e del compensatore dovute alla saturazione della variabile di controllo e dire quali soluzioni si potrebbero adottare per tenerne conto.

- POICHÈ DEVE ESSERE $x \in [0,1]$ :
  - OCCORRE MODERAZIONE DEL CONTROLLO
  - CONVIENE UTILIZZARE PER $R(s)$ UNA CONFIGURAZIONE ANTI-WINDUP
  - SI POTREBBE INTRODURRE UN PRE-FILTRO DEL RIFERIMENTO