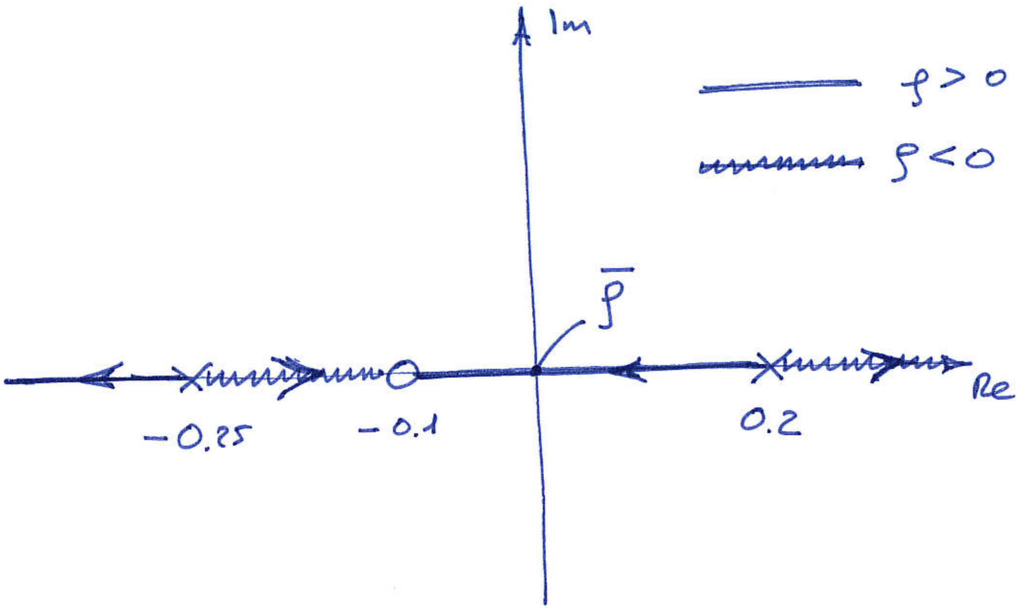
ESERCIZIO 1

Si consideri un sistema con retroazione negativa e funzione d'anello $L(s) = \dfrac{\mu(1+10s)}{(1-5s)(1+4s)}$.

1.1) Disegnare l'andamento del *luogo delle radici* diretto e inverso associato a $L(s)$.

$$L(s) = \rho \frac{s+0.1}{(s-0.2)(s+0.25)} \qquad \rho = -\frac{\mu}{2}$$



1.2) Attraverso il luogo delle radici disegnato, valutare se il sistema in anello chiuso può essere reso asintoticamente stabile con un'opportuna scelta del guadagno μ.

$$\rho > \bar{\rho}$$

- CON LA REGOLA DELLA PUNTEGGIATURA:

$$\bar{\rho} = \frac{0.2 \cdot 0.25}{0.1} = \frac{1}{2} \implies \bar{\mu} = -2\bar{\rho} = -1$$

AS. STAB. $\iff \bar{\mu} < -1$

1.3) Si supponga ora che la funzione d'anello contenga anche un ritardo, e sia data da:

$$\widetilde{L}(s) = \frac{\mu(1+10s)\, e^{-40s}}{(1-5s)(1+4s)}$$

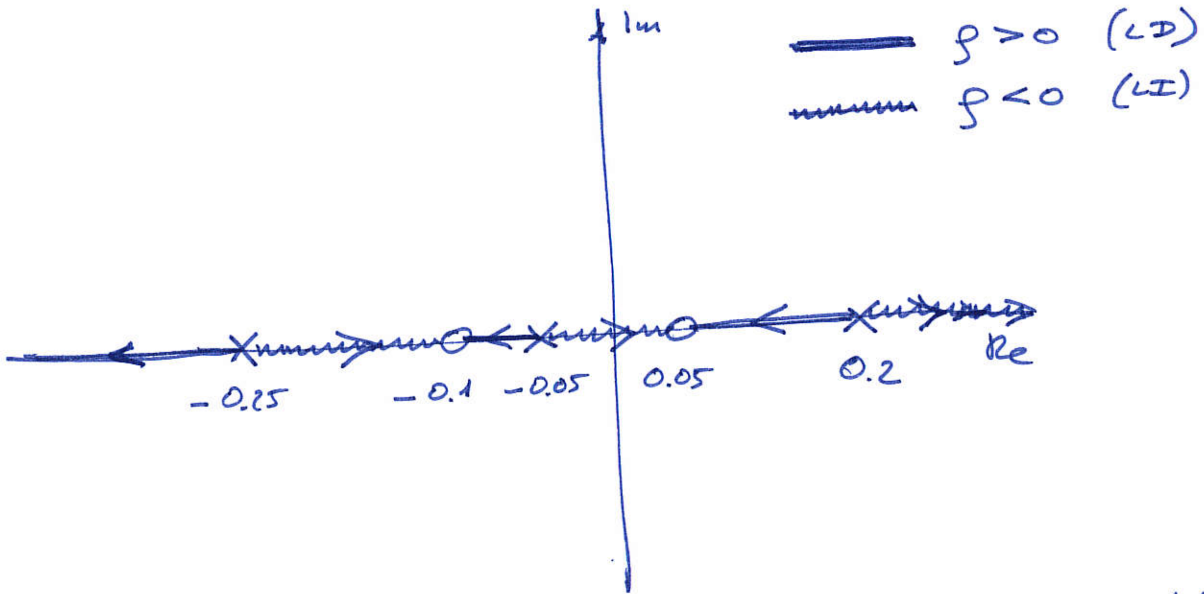
Mediante il metodo di Padé, determinare un'approssimazione razionale di $\widetilde{L}(s)$.

$$e^{-40s} \simeq \frac{1-20s}{1+20s}$$

$$\widetilde{L}(s) = \mu \frac{(1+10s)(1-20s)}{(1-5s)(1+4s)(1+20s)} =$$

$$= \rho \frac{(s+0.1)(s-0.05)}{(s-0.2)(s+0.25)(s+0.05)} \qquad \rho = \frac{\mu}{2}$$

1.4) Dopo aver tracciato il luogo delle radici associato a $\widetilde{L}(s)$, discutere di nuovo la possibilità di ottenere un sistema retroazionato asintoticamente stabile mediante la scelta del guadagno μ.



⟹ NON ESISTE ALCUN VALORE DI ρ PER CUI TUTTI I RAMI SONO NEL SEMIPIANO SINISTRO

⟹ $\nexists\, \rho$ CHE STABILIZZA ⟹ $\nexists\, \mu$ CHE STABILIZZA

ESERCIZIO 2

Si consideri un controllore digitale che opera con periodo di campionamento $T = 0.5$ descritto dalla seguente legge di controllo:

$$u^*(k) = 0.5u^*(k-1) + 0.1e^*(k-1)$$

2.1) Determinare la corrispondente funzione di trasferimento $R^*(z)$.

$$R^*(z) = \frac{0.1}{z-0.5}$$

2.2) Discutere se tale controllore può derivare dalla discretizzazione mediante il metodo di *Tustin* di un controllore analogico di riferimento $R^o(s)$. In caso affermativo, ricavare $R^o(s)$.

- METODO DI TUSTIN

$$s = \frac{2}{T}\,\frac{z-1}{z+1} = 4\,\frac{z-1}{z+1}$$

- TRASF. DI TUSTIN INVERSA

$$s(z+1) = 4(z-1)$$

$$z(s-4) = -4-s$$

$$z = \frac{s+4}{4-s}$$

$$R^o(s) = R^*\left(\frac{s+4}{4-s}\right) = \frac{0.1}{\frac{s+4}{4-s} - 0.5} = \frac{0.1(4-s)}{s+4-0.5(4-s)} =$$

$$= \frac{0.1(4-s)}{1.5s+2} = 0.2\,\frac{1-s/4}{1+s\frac{3}{4}}$$

2.3) Assumendo che il regolatore $R^*(z)$ sia utilizzato per controllare in anello chiuso un sistema a segnali campionati descritto da $G^*(z) = \rho \dfrac{z-0.5}{z^2}$, determinare l'estremo superiore dei valori del parametro ρ per cui il sistema di controllo rimane asintoticamente stabile.

$$L(z) = R^*(z)\,G^*(z) = \frac{0.1\rho}{z^2}$$

CONSIDERO

$$\varphi_{AC}(z) = z^2 + 0.1\rho \quad , \quad \rho > 0$$

PER L'AS. STAB.

POLI: $z_{1,2} = \pm j\sqrt{0.1\rho}$ OCCORRE IMPORRE $|z_{1,2}| < 1$

$$|z_{1,2}| = \sqrt{0.1\rho} < 1 \implies 0.1\rho < 1$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\rho < 10}$$

2.4) Verificare che il sistema di controllo considerato al punto precedente non può avere mai, per nessun valore di ρ, un'accettabile precisione statica nell'inseguimento di un riferimento a scalino.

$$F(z) = \frac{L(z)}{1+L(z)} = \frac{0.1\rho}{z^2+0.1\rho}$$

GUADAGNO IDEALE

$$\mu_F = F(1) = \frac{0.1\rho}{1+0.1\rho}$$

POICHÈ $\rho_{sup} = 10 \implies \mu_{Fsup} = \frac{1}{2} < 1$

SCARSA PRECISIONE STATICA

2.5) Calcolare, al variare di ρ, il tempo di latenza e il tempo di assestamento della risposta del sistema di controllo a un riferimento a scalino.

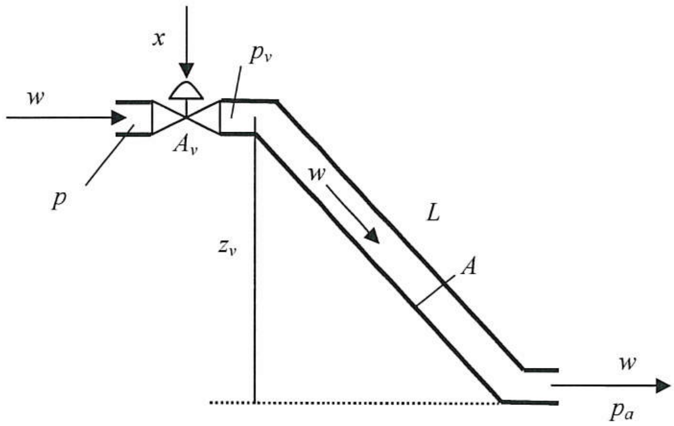
$$F(z) = \frac{0.1\rho}{z^2+0.1\rho} \qquad \nu = 2$$

- TEMPO DI LATENZA: $k_\ell = \nu - 1 = 1$
- TEMPO DI ASSESTAMENTO: $k_a \simeq -\dfrac{5}{\ln|z_{1,2}|} = -\dfrac{5}{\frac{1}{2}\ln(0.1\rho)}$

$$t_a \simeq k_a T = -\frac{5}{\ln(0.1\rho)}$$

ESERCIZIO 3

Si consideri il sistema idraulico mostrato in figura, costituito da una condotta inclinata di lunghezza L e sezione costante A, percorsa da un liquido con densità ρ. La portata w è regolata attraverso la valvola (supposta lineare). La pressione p in ingresso alla valvola è da considerare come un disturbo.



3.1) Verificare che il modello dinamico nonlineare del processo può essere scritto nella forma:

$$\dot{w}(t) = -\alpha(x(t))\, w^2(t) + \beta p(t) + \gamma$$

dove $\alpha(x(t))$ è una funzione nonlineare di $x(t)$, sempre positiva, mentre β e γ sono opportune costanti positive.

- PER SEMPLICITÀ PONIAMO $p_a = 0$

- CONSERVAZIONE QUANTITÀ DI MOTO:

$$\dot{w} = -\frac{\rho A g}{L}\left(z_L^* - z_0^*\right) - \bar{f} w^2$$

$$z_L^* = 0 \quad , \quad z_0^* = z_v + \frac{p_v}{\rho g}$$

- EQUAZIONE VALVOLA:

$$w = k A_v x \sqrt{\rho(p - p_v)} \implies p_v = p - \frac{w^2}{\rho k^2 A_v^2 x^2}$$

- MODELLO COMPLESSIVO:

$$\dot{w} = \frac{\rho A g}{L}\left(z_v + \frac{p}{\rho g} - \frac{w^2}{\rho^2 g k^2 A_v^2 x^2}\right) - \bar{f} w^2 =$$

$$= -\underbrace{\left(\frac{A}{L\rho k^2 A_v^2 x^2} + \bar{f}\right)}_{\alpha(x) > 0 \ \forall x} w^2 + \underbrace{\frac{A}{L}}_{\beta > 0} p + \underbrace{\frac{\rho A g z_v}{L}}_{\gamma > 0}$$

3.2) Determinare il valore di equilibrio della portata $\overline{w}$ per dati valori degli ingressi $\overline{x}$ e $\overline{p}$.

$$0 = -\alpha(\overline{x})\overline{w}^2 + \beta\overline{p} + \gamma$$

$$\Longrightarrow \quad \overline{w} = \sqrt{\frac{\beta\overline{p}+\gamma}{\alpha(\overline{x})}}$$

3.3) Ricavare il modello linearizzato del processo nell'intorno di una generica condizione di equilibrio.

$$\delta\dot{w} = -a\,\delta w + b\,\delta x + \beta\,\delta p$$

$$a = 2\alpha(\overline{x})\overline{w} = 2\overline{w}\left(\frac{A}{L\rho k^2 A_v^2 x^2} + f\right) > 0$$

$$b = -\alpha'(\overline{x})\overline{w}^2 = \frac{2A\overline{w}^2}{L\rho k^2 A_v^2 \overline{x}^3} > 0$$

3.4) Dal modello linearizzato calcolare le due funzioni di trasferimento $G_{wx}(s)$ e $G_{wp}(s)$, giudicandone la stabilità e valutando il segno dei rispettivi guadagni.

$$G_{wx}(s) = \frac{b}{s+a} \quad , \quad G_{wp}(s) = \frac{\beta}{s+a}$$

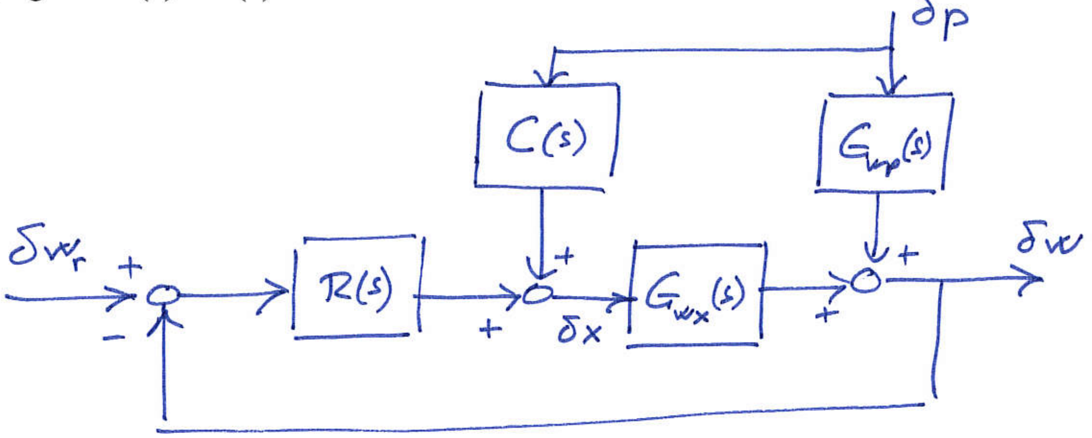
- POLO: $-a = -2\alpha(\overline{x})\overline{w} < 0 \Longrightarrow$ AS. STAB.

- GUADAGNI:

$$\mu_{wx} = G_{wx}(0) = \frac{b}{a} > 0$$

$$\mu_{wp} = G_{wp}(0) = \frac{\beta}{a} > 0$$

3.5) Disegnare lo schema a blocchi di un sistema di controllo della portata w, comprendente un regolatore in anello chiuso $R(s)$ e un compensatore $C(s)$ in anello aperto del disturbo p. Spiegare come andrebbero progettati $R(s)$ e $C(s)$.



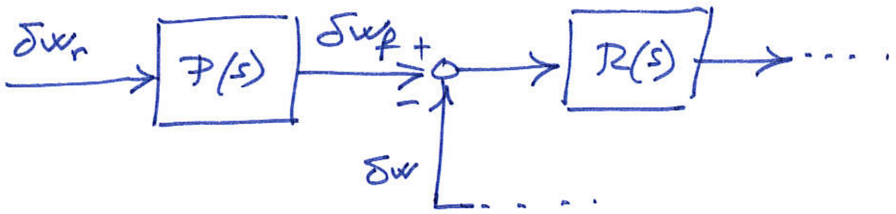
R(s) VA PROGETTATO SU $G_{wx}(s)$

PER ESEMPIO: $R(s) = \mu_R \dfrac{1+sT_R}{s}$, $T_R = \dfrac{1}{a}$

$\mu_R > 0$ CALIBRATO PER OTTENERE UN ADEGUATO VALORE DI $\omega_c = \mu_{wx}\mu_R$

$C(s) = -\dfrac{G_{wp}(s)}{G_{wx}(s)} = -\dfrac{\beta}{b}$ (COMPENSATORE STATICO IDEALE)

3.6) Aggiungere allo schema un prefiltro $P(s)$ del segnale di riferimento. Spiegare quale potrebbe essere lo scopo di tale componente.



- IL PREFILTRO $P(s)$ (PASSA-BASSO) POTREBBE SERVIRE PER MIGLIORARE LA MODERAZIONE, SENZA ALTERARE ω_c
- SI RICORDI INFATTI CHE LA VARIABILE DI CONTROLLO δx È SOGGETTA A SATURAZIONE, VISTO CHE $x \in [0, 1]$