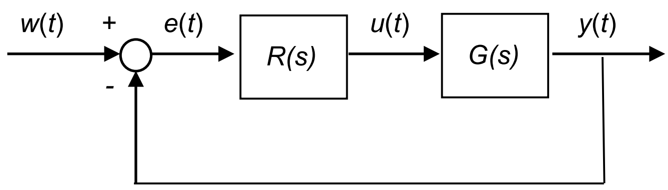
ESERCIZIO 1

Si consideri il luogo delle radici associato al sistema di controllo in figura, dove

$$G(s) = \frac{10}{(s+a)(s-6)} \quad , \quad a > 0 \quad , \quad R(s) = k$$

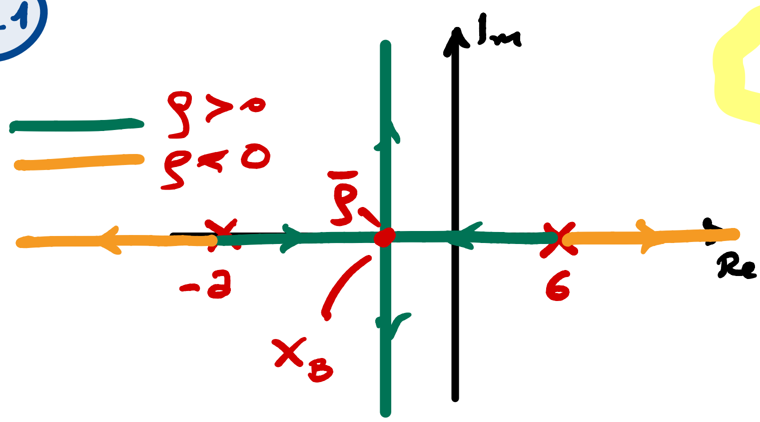


1.1) Con a generico, calcolare il baricentro (in anello aperto e in anello chiuso) e determinare il valore di k per cui il sistema in anello chiuso possiede due poli coincidenti in tale punto.

1.2) Mediante il luogo delle radici, dire per quali valori di a esiste la possibilità di tarare il parametro k in modo che il sistema in anello chiuso risulti asintoticamente stabile.

1.3) Ricavare una coppia di valori di a e k per cui il sistema in anello chiuso, oltre a essere asintoticamente stabile, presenta un tempo di assestamento $t_a < 2$.

1.1



$\rho = 10k$

$\boxed{x_B = \frac{1}{2}(6-a)}$

SI CONSERVA AL VARIARE DI ρ

$$\bar{\rho} = \left(6 - \frac{1}{2}(6-a)\right)^2 = \left(3 + \frac{1}{2}a\right)^2$$

$$\boxed{\bar{k}} = \frac{\bar{\rho}}{10} = \boxed{\frac{1}{10}\left(3+\frac{1}{2}a\right)^2}$$

1.2

OCCORRE CHE SIA $x_B < 0$, OVVERO

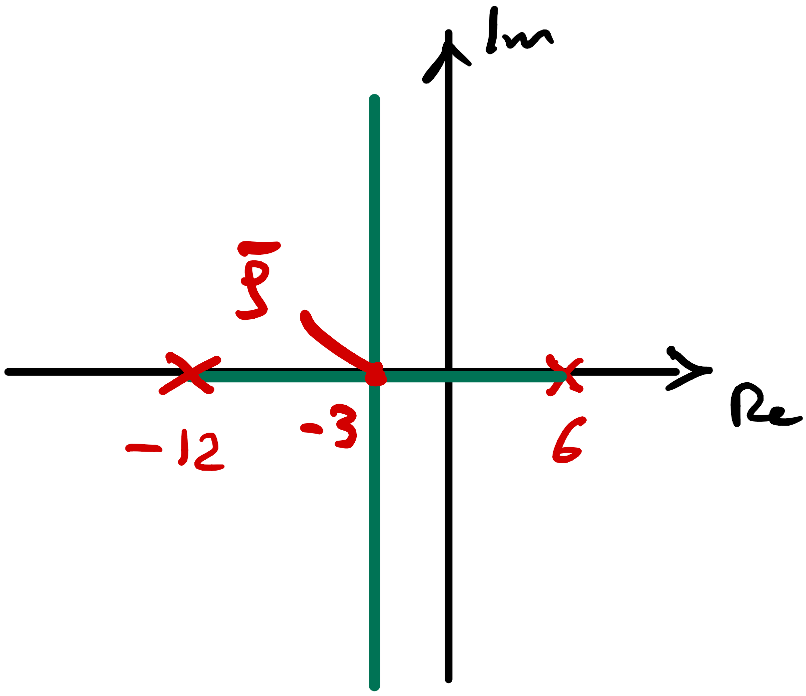
$$\frac{1}{2}(6-a) < 0 \implies \boxed{a > 6}$$

1.3

- PER AVERE $t_a < 2$ OCCORRE CHE ENTRAMBI I POLI IN A. CHIUSO ABBIANO PARTE REALE $-\sigma$ CON $\sigma > 2.5$ (INFATTI $t_a \simeq \frac{5}{\sigma}$).

- POSSIAMO PER ESEMPIO SCEGLIERE $x_B = -3$, OVVERO

$$3 - \frac{a}{2} = -3 \implies a = 12$$



CON $\bar{k} = \frac{1}{10}\left(3 + \frac{1}{2}a\right)^2 = 8.1$, I POLI IN A.C. SONO REALI COINCIDENTI IN -3.

- QUINDI, LA COPPIA $\boxed{\bar{a} = 12,\ \bar{k} = 8.1}$ RISPETTA LE SPECIFICHE.

ESERCIZIO 2

Il sistema a segnali campionati, con periodo di campionamento $T = 0.5$, associato a una certa funzione di trasferimento $G(s)$ sia descritto da

$$G^*(z) = \frac{4}{z-2}$$

2.1) Spiegare cosa significa "sistema a segnali campionati" e cosa rappresenta la funzione di trasferimento $G^*(z)$.

2.2) Ricavare l'espressione della funzione di trasferimento $G(s)$ del sistema a tempo continuo.

2.3) Utilizzando il metodo di Ragazzini (ad assegnamento del modello), progettare un regolatore digitale $R^*(z)$ in modo che:

- il sistema di controllo digitale sia asintoticamente stabile;
- la funzione di trasferimento tra il riferimento $w^*(k)$ e la variabile controllata $y^*(k)$ sia un FIR;
- in risposta al riferimento $w^*(k) = A\,\text{sca}^*(k)$, risulti $\lim_{k\to\infty} y^*(k) = A$.

2.4) In corrispondenza del regolatore progettato, calcolare l'andamento di $y^*(k),\ k \geq 0$, in risposta al riferimento $w^*(k) = A\,\text{sca}^*(k)$.

2.1 SISTEMA A SEGNALI CAMPIONATI:

$$u^*(k) \longrightarrow \boxed{D/A} \xrightarrow{u(t)} \boxed{G(s)} \xrightarrow{y(t)} \boxed{A/D} \longrightarrow y^*(k)$$

- LA FDT $G^*(z)$ RAPPRESENTA IL RAPPORTO $\dfrac{Y^*(z)}{U^*(z)}$ DELLE TRASFORMATE ZETA DI $y^*(k)$ E $u^*(k)$ QUANDO LO STATO INIZIALE È NULLO.

2.2

POLO DI $G^*(z)$

$$G(s) = \frac{k}{s-p} \quad \text{CON} \quad p = \frac{1}{T}\ln \bar{z} = 2\ln 2 \simeq 1.39$$

$$G(0) = -\frac{k}{p} = G^*(1) = -4$$

$$\Downarrow$$

$$k = 4p = 8\ln 2 \simeq 5.55$$

$$\boxed{G(s) \simeq \frac{5.55}{s-1.39}}$$

2.3

- SI PUÒ SCEGLIERE:

$$F(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{\rho(z-a)}{z^2}$$

- VINCOLI: $\begin{cases} A(2) = B(2) \\ A(1) = B(1) \end{cases}$ PER NON CANCELLARE IL POLO INSTABILE; PER GARANTIRE LA PRECISIONE STATICA

$$\Longrightarrow \begin{cases} 4 = \rho(2-a) \\ 1 = \rho(1-a) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 2/3 \\ \rho = 3 \end{cases} \qquad F(z) = \frac{3z-2}{z^2}$$

- IL REGOLATORE È

$$R^*(z) = \frac{1}{G^*(z)} \frac{B(z)}{A(z) - B(z)} = \frac{3}{4} \frac{z - 2/3}{z-1} = \frac{\frac{3}{4}z - \frac{1}{2}}{z-1}$$

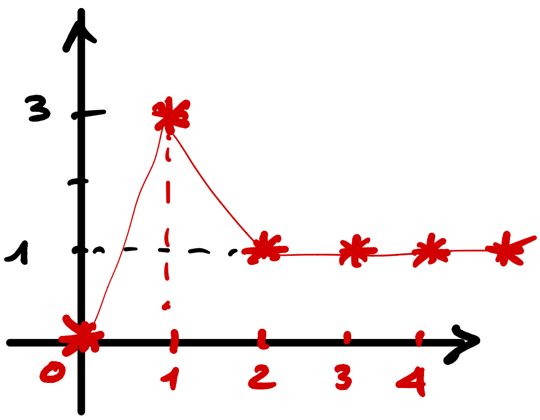
2.4

$$y^*(z) = F(z) W^*(z) = \frac{3z-2}{z^2} \cdot \frac{Az}{z-1} = 3A \frac{z - 2/3}{z(z-1)}$$

- CON LA DIVISIONE DEI POLINOMI, SI OTTIENE:

$$\frac{z - 2/3}{z^2 - z} = z^{-1} + \frac{1}{3} z^{-2} + \frac{1}{3} z^{-3} + \frac{1}{3} z^{-4} + \dots$$

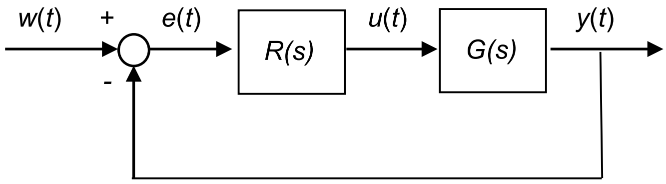
$$\Longrightarrow \begin{aligned} & y^*(0) = 0 \\ & y^*(1) = 3A \\ & y^*(2) = A \\ & y^*(3) = A \\ & \dots \end{aligned}$$



NOTA CHE, POICHÉ $F(z)$ È UN FIR, LA RISPOSTA SI ASSESTA IN TEMPO FINITO

ESERCIZIO 3

Si consideri il sistema di controllo descritto in figura, dove $G(s) = 1/s$, $R(s) = \mu > 0$.



3.1) Con $w(t) = \text{sca}(t)$, calcolare l'andamento della variabile di controllo $u(t), t \geq 0$, e verificare in particolare che risulta $u(0) = \mu$.

3.2) Progettare un pre-filtro del riferimento per migliorare la moderazione, senza alterare troppo le prestazioni di *tracking*. A progetto ultimato, ricalcolare $u(t), t \geq 0$ in risposta a $w(t) = \text{sca}(t)$ in presenza del pre-filtro.

3.3) Ricavare un'azione in *feedforward* del riferimento equivalente al pre-filtro progettato e disegnare il corrispondente schema di controllo.

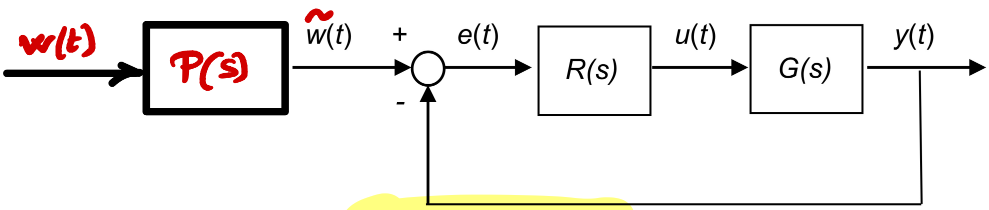
3.1

$$G_{uw}(s) = \frac{R(s)}{1+R(s)G(s)} = \frac{\mu s}{s+\mu}$$

$$U(s) = G_{uw}(s)W(s) = \frac{\mu}{s+\mu} \implies u(t) = \mu e^{-\mu t}, \ t \geq 0$$

$$u(0) = \mu$$

3.2



- SI PUÒ SCEGLIERE $P(s) = \frac{1}{1+s\tau}$ CON $\tau < \frac{1}{\omega_c} = \frac{1}{\mu}$

$$\tilde{G}_{uw}(s) = \frac{P(s)R(s)}{1+R(s)G(s)} = \frac{\mu/\tau \, s}{(s+\mu)(s+1/\tau)}$$

$\alpha = \frac{\mu}{1-\mu\tau}$ (HEAVISIDE)

$$\tilde{U}(s) = \tilde{G}_{uw}(s)W(s) = \frac{\mu/\tau}{(s+\mu)(s+1/\tau)} = \frac{\alpha}{s+\mu} + \frac{\beta}{s+1/\tau}$$

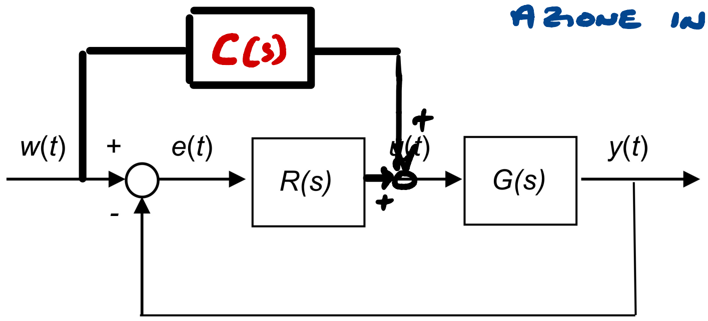
$\beta = -\alpha$

$$\tilde{u}(t) = \frac{\mu}{1-\mu\tau}\left(e^{-\mu t} - e^{-t/\tau}\right), \ t \geq 0$$

- NOTA CHE $\tilde{u}(0) = 0 \implies$ MINORE SOLLECITAZIONE DELLA VAR. DI CONTROLLO

3.3

AZIONE IN FEEDFORWARD EQUIVALENTE



$$P(s)\,R(s) = C(s) + R(s)$$

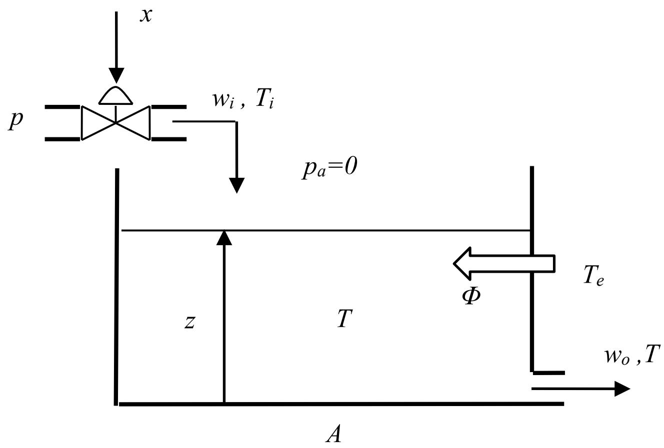
$$\boxed{C(s)} = R(s)\left(P(s) - 1\right) =$$

$$= \mu\left(\frac{1}{1+s\tau} - 1\right) = \boxed{\frac{-\mu\tau s}{1+s\tau}}$$

REALIZZABILE E AS. STABILE ✓

ESERCIZIO 4

Si consideri il sistema termo-idraulico mostrato in figura. Si desidera controllare congiutamente il livello $z(t)$ e la temperatura $T(t)$ del liquido nel serbatoio, usando come variabili manipolabili la posizione $x(t)$ della valvola e la temperatura $T_e(t)$ dell'ambiente esterno. La potenza termica scambiata con l'ambiente sia data da $\Phi(t) = k_c(A + 2\pi Rz(t))\big(T_e(t) - T(t)\big)$ dove $A = \pi R^2$ è l'area di base, $A_l = 2\pi Rz(t)$ è la superficie laterale bagnata dal liquido, R è il raggio della sezione e k_c è il coefficiente di conduzione del calore (per unità di superficie). Si supponga che la temperatura T_i e la pressione p siano parametri costanti. La valvola sia lineare con parametri k_v e A_v . La portata in uscita sia descritta da $w_o(t) = k_o\sqrt{z(t)}$, dove k_o è un'opportuna costante. Si supponga che il liquido sia ben miscelato e che siano trascurabili gli scambi di lavoro meccanico con l'ambiente. Si indichi con ρ la densità del liquido, con $p_a = 0$ la pressione atmosferica e con c il calore specifico del liquido.



4.1) Ricavare il modello dinamico nonlineare del sistema.

4.2) Calcolare in funzione dei parametri fisici e geometrici i coefficienti del seguente modello linearizzato nell'intorno di un dato equilibrio:

$$\delta\dot{z}(t) = \alpha_1\delta z(t) + \alpha_2\delta x(t)$$
$$\delta\dot{T}(t) = \beta_1\delta z(t) + \beta_2\delta T(t) + \beta_3\delta x(t) + \beta_4\delta T_e(t)$$

Mostrare inoltre che lo stato di equilibrio, qualunque esso sia, è asintoticamente stabile.

4.3) Per il sistema in esame, disegnare lo schema a blocchi di uno schema di controllo MIMO in anello chiuso, spiegando come si potrebbe ottenere il disaccoppiamento dei due anelli di regolazione.

4.1

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = \dfrac{1}{\rho A}\big(w_i(t) - w_o(t)\big) = \dfrac{1}{\rho A}\left(k_v A_v x(t)\sqrt{\rho p} - k_o\sqrt{z(t)}\right) \\ \dot{T}(t) = \dfrac{1}{c\rho A z(t)}\left(c k_v A_v x(t)\sqrt{\rho p}\,\big(T_i - T(t)\big) + k_c\big(A + 2\pi R z(t)\big)\big(T_e(t) - T(t)\big)\right) \end{cases}$$

4.2

$$\alpha_1 = -\frac{k_0}{2\rho A\sqrt{\bar z}} < 0 \quad , \quad \alpha_2 = \frac{k_v A_v \sqrt{p}}{\sqrt{\rho}\, A}$$

$$\beta_1 = \frac{1}{c\rho A \bar z} 2\pi R k_c (\bar T_e - \bar T)$$

$$\beta_2 = -\frac{1}{c\rho A\bar z}\left(c k_v A_v \bar x \sqrt{\rho p} + k_c (A + 2\pi R \bar z)\right) < 0$$

$$\beta_3 = \frac{(T_i - \bar T)}{\rho A \bar z} k_v A_v \sqrt{\rho p} \quad , \quad \beta_4 = \frac{k_c}{c\rho A\bar z}(A + 2\pi R\bar z)$$

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{bmatrix}$$

GLI AUTOVALORI SONO α_1 E β_2 ENTRAMBI NEGATIVI

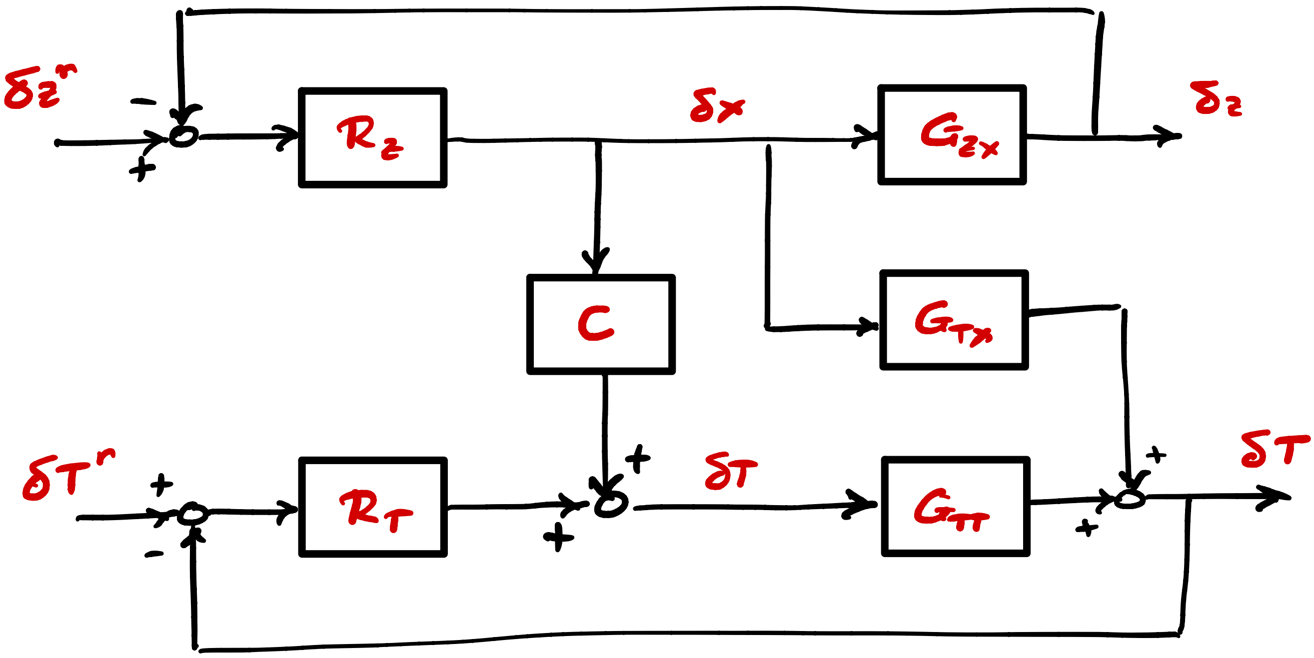
$\Longrightarrow$ STATO DI EQUILIBRIO AS. STABILE

4.3

$$B = \begin{bmatrix} \alpha_2 & 0 \\ \beta_3 & \beta_4 \end{bmatrix}$$

$$G(s) = (sI - A)^{-1} B = \frac{1}{(s-\alpha_1)(s-\beta_2)} \begin{bmatrix} \alpha_2(s-\beta_2) & 0 \\ \alpha_2\beta_1 + \beta_3(s-\alpha_1) & \beta_4(s-\alpha_1) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} G_{zx}(s) & G_{zT}(s) \\ G_{Tx}(s) & G_{TT}(s) \end{bmatrix}$$



$$C(s) = -\frac{G_{Tx}(s)}{G_{TT}(s)} = -\left(\frac{\alpha_2\beta_1}{\beta_4(s-\alpha_1)} + \frac{\beta_3}{\beta_4}\right)$$