ESERCIZIO 1

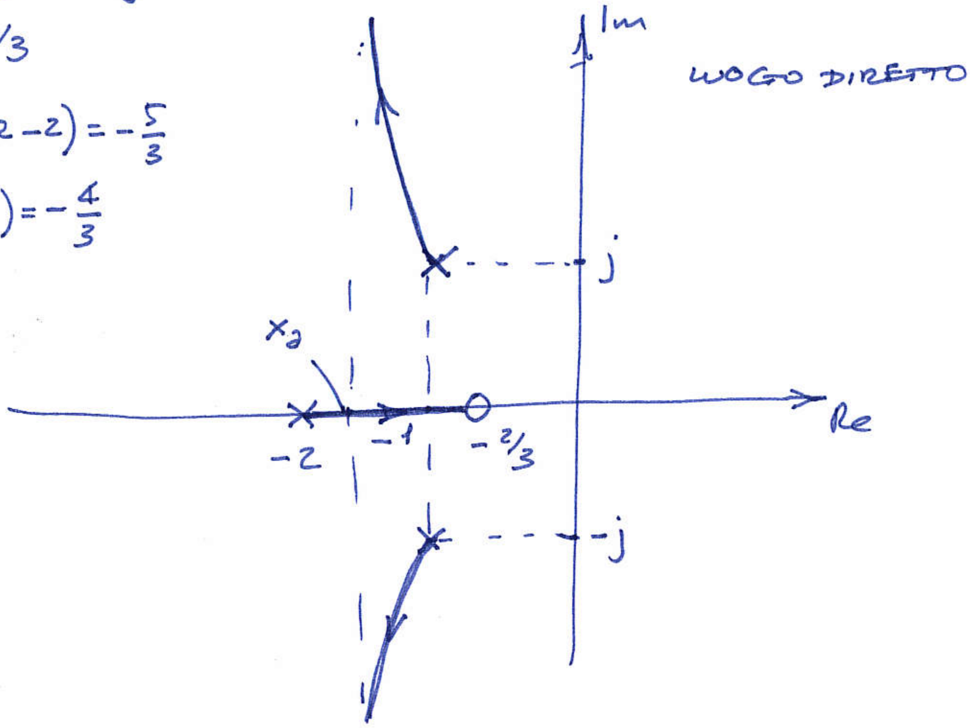
Si consideri un sistema con retroazione negativa e funzione d'anello $L(s) = \dfrac{\rho(s+2/3)}{(s^2+2s+2)(s+2)}$.

1.1) Disegnare l'andamento del *luogo delle radici diretto* associato a $L(s)$.

- POLI: $-2, -1 \pm j$
- ZERO: $-2/3$

$x_a = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3} - 2 - 2\right) = -\frac{5}{3}$

$x_b = \frac{1}{3}\left(-2-2\right) = -\frac{4}{3}$

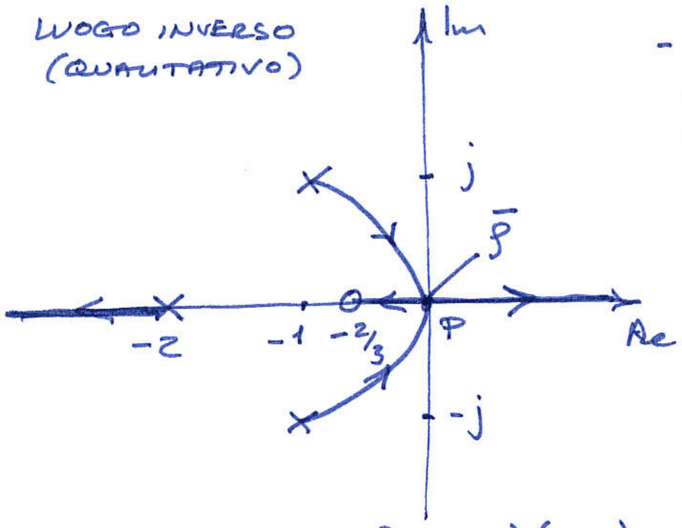


1.2) Attraverso il luogo delle radici disegnato, verificare che per valori positivi di ρ il sistema in anello chiuso possiede sempre due poli complessi coniugati.

I 2 RAMI CHE PARTONO DAI POLI COMPLESSI RIMANGONO COMPLESSI (CONIUGATI) PER OGNI VALORE DI $\rho > 0$.

1.3) Disegnare l'andamento del *luogo delle radici inverso* associato a $L(s)$, dimostrando che due dei suoi rami confluiscono nell'origine del piano complesso. Determinare il valore di ρ per cui ciò accade.

LUOGO INVERSO (QUALITATIVO)



- È EVIDENTE CHE DEVE ESISTERE UN PUNTO DI CONFLUENZA P DEI 2 RAMI COMPLESSI.
- PER CALCOLARE L'ASCISSA DI P SI POSSONO ANALIZZARE I PUNTI DI MIN/MAX DI

$$\gamma(x) = -\frac{D(x)}{N^*(x)}$$

NON HA RADICI REALI

$$\gamma(x) = -\frac{(x^2+2x+2)(x+2)}{x+2/3} = \frac{x^3+4x^2+6x+4}{x+2/3}$$

$$\gamma'(x) = \frac{(3x^2+8x+6)(x+2/3)-(x^3+4x^2+6x+4)}{(x+2/3)^2} = \frac{x\,\overbrace{(2x^2+6x+\tfrac{16}{3})}}{(x+2/3)^2}$$

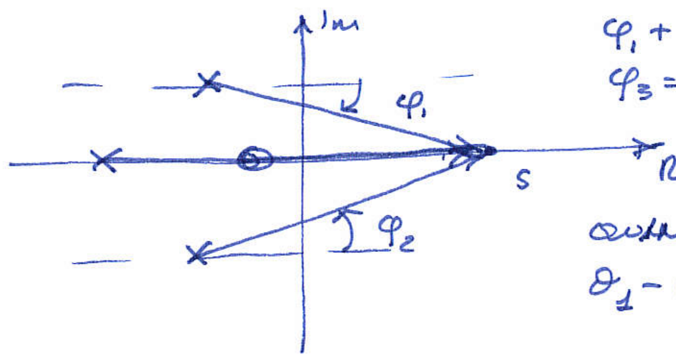
- PER AVERE $\gamma'(x)=0$, DEVE ESSERE $x=0$ (È UN PUNTO DI MAX).
- QUINDI P COINCIDE CON L'ORIGINE.
- IN BASE ALLA PUNTEGGIATURA: $\bar{\rho} = -\dfrac{2\sqrt{2}\sqrt{2}}{2/3} = -6$

1.4) Dimostrare perché, in generale, tutti i punti dell'asse reale appartengono al luogo delle radici.

- UN PUNTO DEL PIANO COMPLESSO APPARTIENE AL LUOGO DELLE RADICI SE E SOLO SE:

$$\sum_i \theta_i - \sum_i \varphi_i = k \cdot 180^\circ$$

- È IMMEDIATO VEDERE CHE, PER QUALUNQUE CONFIGURAZIONE DI POLI E ZERI, TALE CONDIZIONE È VERIFICATA PER OGNI PUNTO S SULL'ASSE REALE. PER ESEMPIO:



$\varphi_1 + \varphi_2 = 0$

$\varphi_3 = \theta_1 = 0$

QUINDI:

$\theta_1 - (\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3) = 0$

ESERCIZIO 2

Si debba progettare un sistema di controllo digitale per il sistema con funzione di trasferimento

$$G(s) = 10 + \frac{5}{s+1}$$

Il periodo di campionamento viene scelto pari a $T = 0.5$ e si utilizza il metodo di *assegnamento del modello*.

2.1) Ricavare una rappresentazione a segnali campionati del sistema descritto da $G(s)$ mostrando che risulta

$$G^*(z) = \frac{\alpha z + \beta}{z + \gamma}$$

con opportuni valori dei parametri α, β e γ.

UTILIZZIAMO IL METODO 1 PER IL CALCOLO DI $G^*(z)$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{G(s)}{s}\right] = 10 + 5(1 - e^{-t}), \; t \geq 0$$

$$y^*(k) = y(kT) = y\left(\frac{k}{2}\right) = 15 - 5e^{-k/2}, \; k \geq 0$$

$$Y^*(z) = \mathcal{Z}\left[y^*(k)\right] = 15\frac{z}{z-1} - 5\frac{z}{z - e^{-1/2}}$$

$e^{-1/2} \simeq 0.6$

$$G^*(z) = Y^*(z)\frac{z-1}{z} \simeq 15 - 5\frac{z-1}{z-0.6} = \frac{10z - 4}{z - 0.6}$$

- QUINDI

$$\begin{cases} \alpha = 10 \\ \beta = -4 \\ \gamma = -0.6 \end{cases}$$

2.2) Verificare che il guadagno statico di $G^*(z)$ è identico a quello di $G(s)$. Dare una spiegazione intuitiva di tale proprietà.

$$\mu^* = G^*(1) = \frac{6}{0.4} = 15 \qquad \Longrightarrow \mu^* = \mu$$

$$\mu = G(0) = 10 + 5 = 15$$

- IN CONDIZIONI STATICHE LA PRESENZA DEI CONVERTITORI È IRRILEVANTE. QUINDI IL RAPPORTO ALL'EQUILIBRIO TRA USCITA E INGRESSO È IDENTICO.

2.3) Progettare il regolatore digitale $R^*(z)$ mediante il metodo di *assegnamento del modello* in modo da garantire che l'errore a transitorio esaurito sia nullo a fronte di un riferimento a scalino. Si scelga $F(z) = \dfrac{\rho}{z-0.4}$ come modello per il sistema in anello chiuso tra riferimento e uscita controllata. Si scriva inoltre la legge di controllo nel dominio del tempo del regolatore progettato.

- PER AVERE $F(1) = 1 \Longrightarrow \dfrac{\rho}{0.6} = 1 \Longrightarrow \rho = 0.6$

$$F(z) = \frac{0.6}{z-0.4} = \frac{B(z)}{A(z)}$$

- CON LA FORMULA RISOLUTIVA, SI OTTIENE:

$$R^*(z) = \frac{1}{G^*(z)} \frac{B(z)}{A(z)-B(z)} = \frac{z-0.6}{10z-4} \cdot \frac{0.6}{z-1} =$$

$$= \frac{0.6(z-0.6)}{10z^2-14z+4} = \frac{0.6(z-0.6)}{10(z-1)(z-0.4)}$$

- LA CORRISPONDENTE LEGGE DI CONTROLLO È:

$$u^*(k) = \frac{1}{10}\left(14u^*(k-1) - 4u^*(k-2) + 0.6\,e^*(k-1) - 0.36\,e^*(k-2)\right)$$

2.4) A progetto ultimato, si ricavi un'approssimazione a tempo continuo $\tilde{R}(s)$ del regolatore digitale $R^*(z)$ e si spieghi come tale approssimazione potrebbe essere usata per valutare la pulsazione critica e il margine di fase del sistema di controllo progettato (non è richiesto il calcolo).

$$\tilde{R}(s) \simeq \frac{H_0(s)}{T} R^*(e^{sT}) = \frac{1-e^{-sT}}{sT} \, \frac{0.6(e^{sT}-0.6)}{10e^{2sT}-14e^{sT}+4} \qquad \text{CON } T=0.5$$

- PER VALUTARE APPROSSIMATIVAMENTE ω_c E φ_m SI CALCOLA:

$$\tilde{L}(s) = \tilde{R}(s)\,G(s)$$

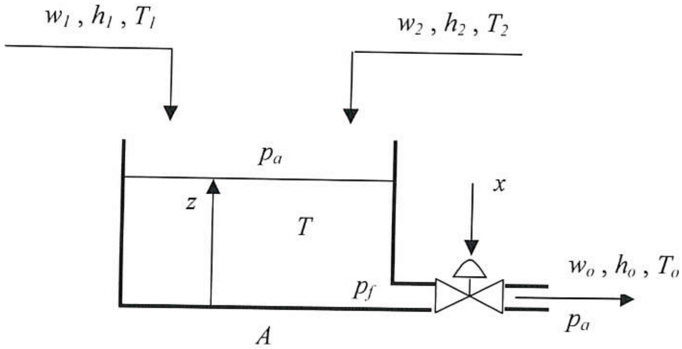
E POI SI RICAVANO ω_c E φ_m DA:

$$|\tilde{L}(j\omega)| = 1 \Longrightarrow \omega_c$$

$$\angle \tilde{L}(j\omega_c) = \varphi_c \Longrightarrow \varphi_m = 180° - |\varphi_c|$$

ESERCIZIO 3

Si consideri il processo termo-idraulico schematizzato in figura. Si indichi con ρ la densità del liquido, con c il suo calore specifico e con p_a la pressione atmosferica. Si supponga che il modello della valvola sia $w_o = kA_v x\sqrt{\rho(p_f - p_a)}$, dove $x \in [0,1]$ è il grado di apertura della valvola, e che il liquido nel serbatoio sia perfettamente miscelato. Si assuma che le temperature T_1 e T_2 siano costanti. Si trascurino inoltre gli scambi termici del liquido con l'ambiente esterno e i contributi di lavoro meccanico. Infine si approssimi l'energia totale del liquido con la sua entalpia, cioè, in termini specifici, si assuma $e = h = cT$.



3.1) Si costruisca il modello dinamico del sistema.

- SI NOTI CHE $p_f = p_a + \rho g z$ E $w_o = kA_v x \rho\sqrt{gz}$

- QUINDI, APPLICANDO I PRINCIPI DI CONSERVAZIONE DI MASSA ED ENERGIA, SI RICAVA

$$\dot{z} = \frac{1}{\rho A}\left(w_1 + w_2 - w_o\right) = \frac{1}{\rho A}\left(w_1 + w_2 - kA_v x \rho\sqrt{gz}\right)$$

$$\dot{T} = \frac{1}{\rho A z}\left(w_1(T_1 - T) + w_2(T_2 - T)\right)$$

3.2) Si determinino i valori di equilibrio del livello z e della temperatura T corrispondenti a valori costanti di $\bar{x}$, $\bar{w}_1$ e $\bar{w}_2$. In particolare si commenti il risultato che si ottiene quando $T_1 = T_2$.

$$0 = \bar{w}_1 + \bar{w}_2 - kA_v \bar{x}\rho\sqrt{g\bar{z}} \implies \bar{z} = \frac{1}{g}\,\frac{(\bar{w}_1 + \bar{w}_2)^2}{k^2 A_v^2 \bar{x}^2 \rho^2}$$

$$0 = \bar{w}_1(T_1 - \bar{T}) + \bar{w}_2(T_2 - \bar{T}) \implies \bar{T} = \frac{\bar{w}_1 T_1 + \bar{w}_2 T_2}{\bar{w}_1 + \bar{w}_2}$$

- SE $T_1 = T_2$ SI OTTIENE $\bar{T} = T_1 = T_2$

- IL RISULTATO È OVVIO, PERCHÈ, SE I DUE LIQUIDI ENTRANTI HANNO LA STESSA TEMPERATURA, LA STESSA TEMPERATURA SI OSSERVA, ALL'EQUILIBRIO, ALL'INTERNO DEL SERBATOIO.

3.3) Si dimostri che il sistema linearizzato può essere descritto dalle seguenti relazioni:

$$Z(s) = \frac{1}{1+s\tau_1}\left(\mu_1 W_1(s) + \mu_2 W_2(s) + \mu_3 X(s)\right)$$

$$T(s) = \frac{1}{1+s\tau_2}\left(\sigma_1 W_1(s) + \sigma_2 W_2(s)\right)$$

e si calcolino i valori dei parametri τ_i, μ_i e σ_i in funzione dei parametri fisici e geometrici del sistema.

- MODELLO LINEARIZZATO:

$$\begin{cases} \delta\dot{z} = -\dfrac{1}{\tau_1}\delta z + \dfrac{\mu_1}{\tau_1}\delta w_1 + \dfrac{\mu_2}{\tau_1}\delta w_2 + \dfrac{\mu_3}{\tau_1}\delta x \\ \delta\dot{T} = -\dfrac{1}{\tau_2}\delta T + \dfrac{\sigma_1}{\tau_2}\delta w_1 + \dfrac{\sigma_2}{\tau_2}\delta w_2 \end{cases}$$

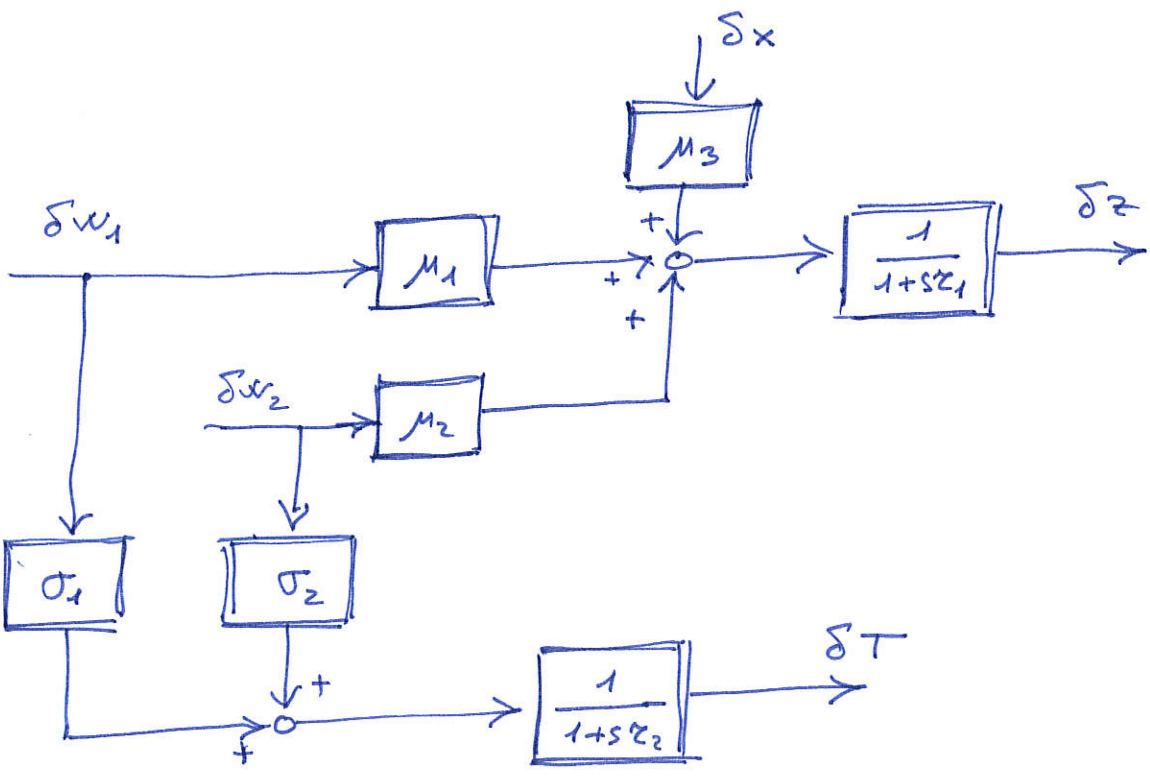
$$-\frac{1}{\tau_1} = -\frac{kA_v \bar{x}\sqrt{g}}{2A\sqrt{\bar{z}}} \Longrightarrow \tau_1 = \frac{2A\sqrt{\bar{z}}}{kA_v \bar{x}\sqrt{g}}$$

$$\mu_1 = \mu_2 = \frac{1}{\rho A}\tau_1 \quad , \quad \mu_3 = -\frac{kA_v\sqrt{g\bar{z}}}{A}\tau_1 = -\frac{2\bar{z}}{\bar{x}}$$

$$-\frac{1}{\tau_2} = -\frac{\bar{w}_1+\bar{w}_2}{\rho A\bar{z}} \Longrightarrow \tau_2 = \frac{\rho A\bar{z}}{\bar{w}_1+\bar{w}_2}$$

$$\sigma_1 = \frac{T_1-\bar{T}}{\rho A\bar{z}}\tau_2 = \frac{T_1-\bar{T}}{\bar{w}_1+\bar{w}_2} \quad , \quad \sigma_2 = \frac{T_2-\bar{T}}{\rho A\bar{z}}\tau_2 = \frac{T_2-\bar{T}}{\bar{w}_1+\bar{w}_2}$$

3.4) Si disegni lo schema a blocchi del sistema linearizzato.



3.5) Dovendo progettare un sistema di controllo decentralizzato per il livello z e la temperatura T, e supponendo che l'ingresso x non sia manipolabile, si spieghi come si potrebbe valutare quale tra le due portate w_1 o w_2 sia più adatta per il controllo di temperatura.

$$G(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{\mu_1}{1+s\tau_1} & \dfrac{\mu_2}{1+s\tau_1} \\[2ex] \dfrac{\sigma_1}{1+s\tau_2} & \dfrac{\sigma_2}{1+s\tau_2} \end{bmatrix}, \quad G(0) = \begin{bmatrix} \mu_1 & \mu_2 \\ \sigma_1 & \sigma_2 \end{bmatrix}$$

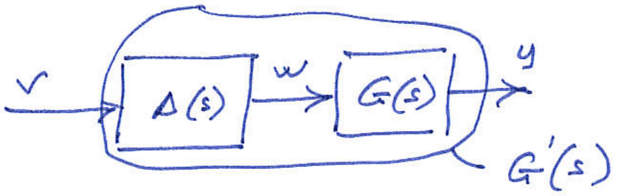
- USANDO IL METODO RGA, SI OTTIENE

$$\lambda = \frac{\mu_1\sigma_2}{\mu_1\sigma_2 - \mu_2\sigma_1} = \frac{\bar{w}_1}{\bar{w}_1 + \bar{w}_2}$$

- PERCIÒ,
  - SE $\bar{w}_1 \gg \bar{w}_2 \Longrightarrow \lambda \simeq 1 \Longrightarrow$ MEGLIO USARE w_2 PER CONTROLLARE T
  - SE $\bar{w}_1 \ll \bar{w}_2 \Longrightarrow \lambda \simeq 0 \Longrightarrow$ MEGLIO USARE w_1 PER CONTROLLARE T
- IN ENTRAMBI I CASI, CONVIENE USARE LA PORTATA CON VALORE MINORE.

3.6) Si consideri ora la situazione in cui si utilizzano come variabili di controllo le grandezze $v_1 = \delta w_1 + \delta w_2$ e $v_2 = \delta w_1 - \delta w_2$. Si calcoli in tal caso la matrice di trasferimento tra il vettore v e l'uscita $y = \begin{bmatrix} \delta z \\ \delta T \end{bmatrix}$ e, anche sfruttando i risultati del punto 3.3, si verifichi che tale matrice ha una struttura triangolare.

$$v = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} w \Longrightarrow w = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} v = \underbrace{\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}}_{\Delta(s)} v$$



= 0 PERCHÈ $\mu_1 = \mu_2$

$$G_{yv}(s) = G'(s) = G(s)\Delta(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{\mu_1+\mu_2}{2(1+s\tau_1)} & \dfrac{\mu_1-\mu_2}{2(1+s\tau_1)} \\[2ex] \dfrac{\sigma_1+\sigma_2}{2(1+s\tau_2)} & \dfrac{\sigma_1-\sigma_2}{2(1+s\tau_2)} \end{bmatrix}$$

$\Longrightarrow G_{yv}(s)$ È TRIANGOLARE.