

ESERCIZIO

Si consideri il sistema retroazionato a tempo continuo di Fig. 1, dove

$$L(s) = \frac{k}{(1+as)^4}$$

con k ed a costanti reali.

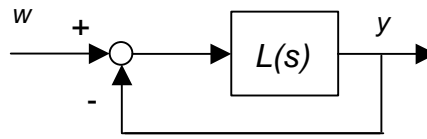


Fig. 1

- 1) Determinare il valore di k (eventualmente espresso in funzione di a) per cui il sistema retroazionato ha un autovalore nell'origine del piano complesso.
- 2) Ponendo $a = 1$ e utilizzando il criterio di Nyquist, discutere la stabilità del sistema al variare di k .
- 3) Ripetere la discussione del punto precedente quando $a = -1$.
- 4) Dire sotto quali condizioni su k ed a sarebbe applicabile il criterio di Bode.

SOLUZIONE DELL'ESERCIZIO

1) Il polinomio caratteristico in anello chiuso è dato da

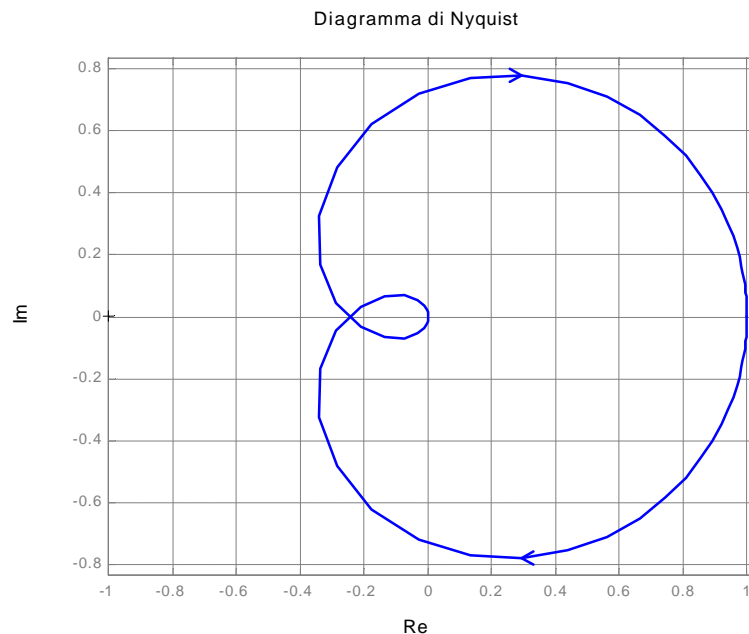
$$\mathbf{j}(s) = (1 + as)^4 + k$$

Perché esso abbia una radice in $s = 0$ occorre che sia

$$\mathbf{j}(0) = 1 + k = 0$$

cioè $k = -1$.

2) Si noti dapprima che in questo caso $P = 0$. In figura poi è riportato il diagramma di Nyquist di $L(s)$ con $k = 1$. Condizione necessaria e sufficiente per l'asintotica stabilità è che tale diagramma non faccia alcun giro intorno al punto $-1/k$.



E' quindi importante ricavare l'ascissa del punto di intersezione del diagramma di Nyquist con il semiasse reale negativo. Tale punto corrisponde alla pulsazione \mathbf{w}_p soluzione dell'equazione

$$-4\arctg \mathbf{w} = -180^\circ$$

cioè $\mathbf{w}_p = 1$.

In corrispondenza, il modulo vale

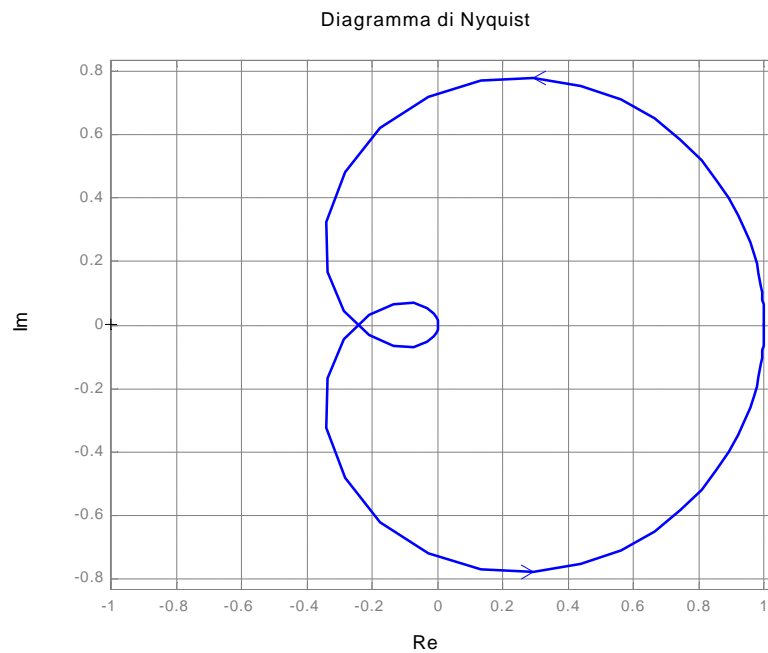
$$|L(j\mathbf{w}_p)| = \frac{1}{(1 + \mathbf{w}_p^2)^2} = \frac{1}{4}$$

e l'ascissa cercata vale dunque $-1/4$.

Si deduce allora che

per $-\infty < k < -1$	$N = -1 \neq P$	\Rightarrow sistema instabile
per $-1 < k < 0$	$N = 0 = P$	\Rightarrow sistema asintoticamente stabile
per $0 < k < 4$	$N = 0 = P$	\Rightarrow sistema asintoticamente stabile
per $k > 4$	$N = -2 \neq P$	\Rightarrow sistema instabile

3) In questo caso $P = 4$ e il diagramma di Nyquist di $L(s)$ con $k = 1$ è quello riportato qua sotto.



Il numero di giri (quando è ben definito) che tale diagramma compie intorno al punto $-1/k$ è sempre diverso da $P = 4$, e il sistema non è perciò asintoticamente stabile per qualunque valore di k .

4) Per poter applicare il criterio di Bode deve essere $a > 0$, in modo da avere $P = 0$, e $|k| > 1$, in modo che il diagramma del modulo della funzione d'anello attraversi l'asse a 0 dB.