

ESERCIZIO

Si consideri il sistema dinamico con ingresso $u(t)$ ed uscita $y(t)$ descritto dalla funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{60}{s^2 + 0.3s + 9}$$

- 1) Determinare la posizione nel piano complesso dei poli del sistema.
- 2) Calcolare l'espressione di modulo e fase della risposta in frequenza associata al sistema.
- 3) Supponendo che l'ingresso sia $u(t) = \sin(\omega t)$, valutare l'andamento asintotico dell'uscita nei tre casi $\omega=0.3$, $\omega=3$ e $\omega=30$, interpretando i risultati in termini del fenomeno della risonanza.

SOLUZIONE

1) Il sistema ha due poli complessi coniugati con pulsazione naturale $w_n = 3$ e smorzamento $\alpha = 0.05$. Il loro valore è quindi

$$s_{1,2} = (-\alpha \pm j\sqrt{1-\alpha^2})w_n \cong -0.15 \pm j3$$

2) Si ha

$$|G(jw)| = \frac{60}{\sqrt{(9-w^2)^2 + 0.09w^2}}$$
$$\arg G(jw) = -\arg(9-w^2 + j0.3w) = \begin{cases} \arctan \frac{0.3w}{w^2-9} & , w < 3 \\ \arctan \frac{0.3w}{w^2-9} - 180^\circ & , w > 3 \end{cases}$$

3) Per il teorema della risposta in frequenza l'uscita ha in tutti e tre i casi un andamento sinusoidale, con la stessa pulsazione dell'ingresso, e con ampiezza pari rispettivamente a

$$|G(j0.3)| \cong 6.73 \quad , \quad |G(j3)| \cong 66.7 \quad , \quad |G(j30)| \cong 0.067$$

Come si vede, l'amplificazione è molto forte quando la pulsazione dell'ingresso è uguale a quella naturale del sistema $w_n = 3$ (fenomeno della risonanza).