

ESERCIZIO

Si consideri il sistema con ingresso u e uscita y descritto dalla funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{k}{s^2 + 2.1s + 0.2}, \quad k > 0$$

- 1) Determinare il valore del parametro k in modo che l'ampiezza dell'uscita sinusoidale di regime in risposta all'ingresso $u(t) = \sin(t)$ sia uguale a 10.
- 2) Ponendo ora $k = 1000$, tracciare l'andamento qualitativo dei diagrammi di Bode del modulo e della fase associati a $G(s)$.
- 3) Sempre con $k = 1000$, valutare l'andamento asintotico dell'uscita quando l'ingresso vale $u(t) = -2 + 3\sin(10t)$.

SOLUZIONE

1) Per il teorema della risposta in frequenza l'ampiezza Y della sinusoide in uscita a transitorio esaurito vale

$$Y = |G(j1)| = \frac{|k|}{|-1 + j2.1 + 0.2|} = \frac{k}{|-0.8 + j2.1|} = \frac{k}{\sqrt{5.05}}$$

Per avere $Y = 10$ deve essere allora $k = 10\sqrt{5.05} \cong 22.47$.

2) Il sistema ha guadagno $m = 1000/0.2 = 5000 \cong 74dB$. I poli valgono -0.1 e -2 . Il diagramma asintotico del modulo ha allora un tratto iniziale orizzontale con ordinata $74dB$ e presenta due cambi di pendenza unitari ($-20dB/decade$) in corrispondenza delle pulsazioni 0.1 e 2 .

Il diagramma asintotico della fase parte dal valore 0° e diminuisce di 90° in corrispondenza di ciascuna delle due pulsazioni $\omega = 0.1$ e $\omega = 2$.

Essendo i poli reali, lo scostamento del diagramma effettivo da quello asintotico è modesto per quel che riguarda il modulo, mentre è consistente per quanto riguarda la fase.

Nella Fig. 1 della pagina successiva sono riportati i diagrammi effettivi.

3) Grazie al principio di sovrapposizione degli effetti si può affermare che l'uscita asintotica sarà costituita da una costante pari a -2 per il guadagno $m = 5000$ e da una sinusoide con ampiezza e fase determinate mediante il teorema della risposta in frequenza. Quindi l'uscita asintotica vale

$$y_\infty(t) = -10000 + 3|G(j10)|\sin(10t + \arg G(j10))$$

Dai diagrammi di Bode, oppure dal calcolo analitico, risulta $|G(j10)| \cong 20dB = 10$ e $\arg G(j10) \cong -170^\circ \cong -3 \text{ rad}$. Pertanto

$$y_\infty(t) \cong -10000 + 30\sin(10t - 3)$$

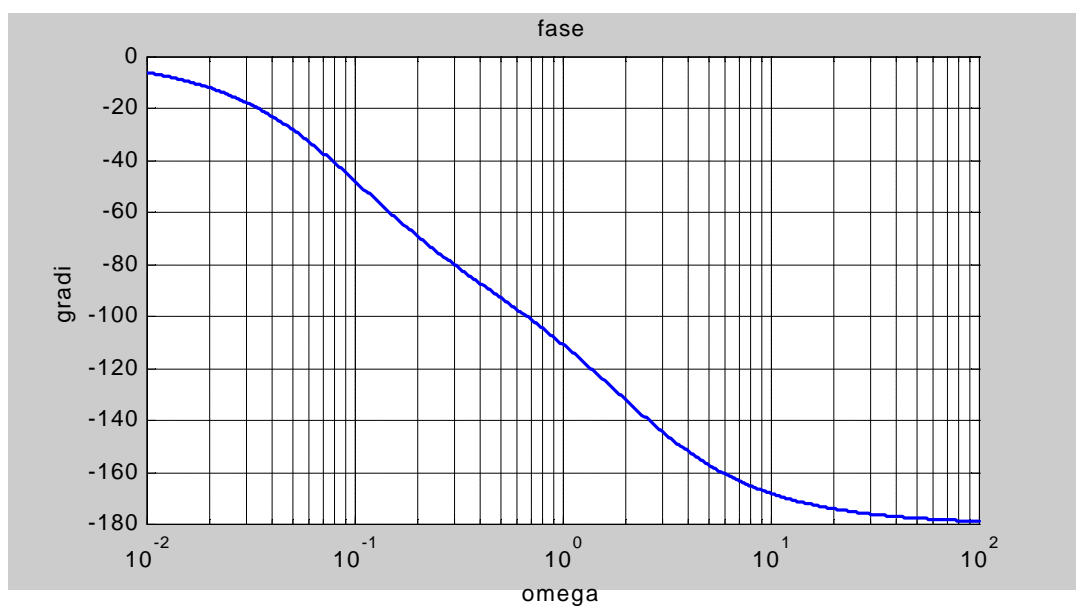
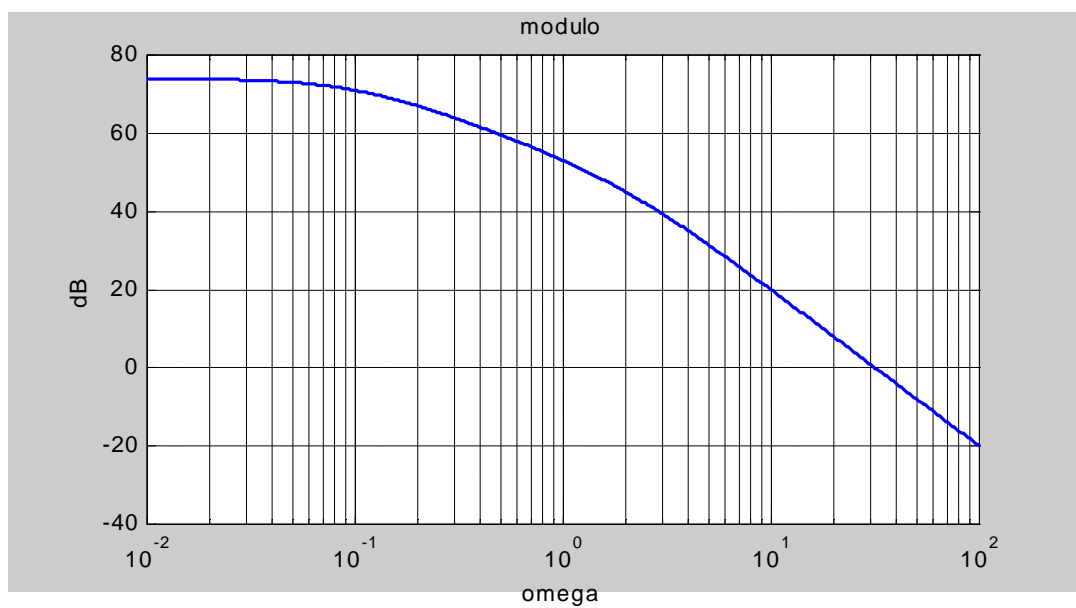


Fig. 1