

ESERCIZIO

Si consideri il sistema a tempo discreto descritto dalla seguente equazione alle differenze.

$$y_k = \frac{3}{2}y_{k-1} + y_{k-2} + \frac{1}{2}u_{k-1} + u_{k-2}$$

- 1) Dire quante variabili di stato sono necessarie per descrivere il sistema.
- 2) Calcolare l'uscita di equilibrio in corrispondenza di $\bar{u} = 1$.
- 3) Calcolare i primi 4 valori della risposta all'impulso del sistema con $y_k=0, k<0$.
- 4) Discutere la stabilità dell'equilibrio calcolato al punto 2.

SOLUZIONE

1) Sono necessarie 2 variabili di stato, perché il sistema è del secondo ordine. La sua funzione di trasferimento è infatti data da

$$W(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{0.5z + 1}{z^2 - 1.5z - 1}$$

2) All'equilibrio, y è costante. Chiamando \bar{y} tale valore, dall'equazione alle differenze si trova

$$\bar{y} = \frac{3}{2} \bar{y} + \bar{y} + \frac{1}{2} \bar{u} + \bar{u}$$

e quindi $\bar{y} = -1$. Peraltro, tale valore coincide, come è ovvio, con il guadagno $W(1)$.

3) Dall'equazione alle differenze, ricordando che l'impulso è diverso da zero solo all'istante $k=0$, oppure dalla procedura di lunga divisione applicata a $W(z)$, si ricava

$$y_0 = 0, y_1 = \frac{1}{2}, y_2 = \frac{7}{4}, y_3 = \frac{25}{8}, y_4 = \frac{103}{16} \dots$$

4) Dato che il sistema è lineare, la stabilità dell'equilibrio è equivalente a quella del sistema, che può essere accertata attraverso l'esame del polinomio caratteristico, già calcolato al punto 1,

$$p(z) = z^2 - 1.5z - 1 = (z - 2)(z + 0.5)$$

Poiché una delle radici ha modulo maggiore di 1, lo stato di equilibrio è instabile.