ESERCIZIO 1

Si consideri il sistema dinamico a tempo continuo descritto dalle seguenti equazioni:

$$\dot{x}_1(t) = -2x_2(t) + ax_1(t)x_2(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = -e^a x_2(t) + x_1(t) + u(t)$$
$$y(t) = x_1(t)$$

dove a è un parametro reale.

1.1) Discutere per quali valori del parametro a il sistema è lineare.

1.2) Ponendo $a = 1$, determinare tutti gli stati di equilibrio corrispondenti all’ingresso costante $\overline{u} = 1$.

1.3) Giudicare la stabilità degli stati di equilibrio prima determinati.

1.4) Ponendo ora $a = 0$, calcolare la funzione di trasferimento del sistema.

1.5) Ancora con $a = 0$, determinare la pulsazione naturale e lo smorzamento dei poli del sistema.

ESERCIZIO 2

Si consideri il seguente sistema lineare invariante a tempo discreto:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k \\ y_k &= Cx_k \end{aligned} \quad , \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.1) Scrivere per esteso le equazioni di stato e la trasformazione di uscita.

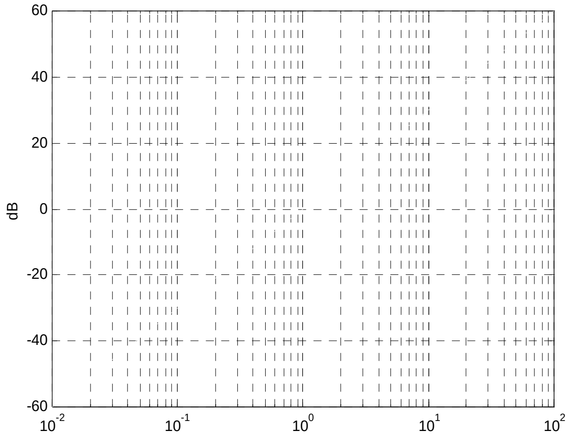
2.2) Calcolare il movimento libero dello stato a partire da una generico stato iniziale x_0. Valutare poi se tale movimento converge a zero per k tendente all'infinito.

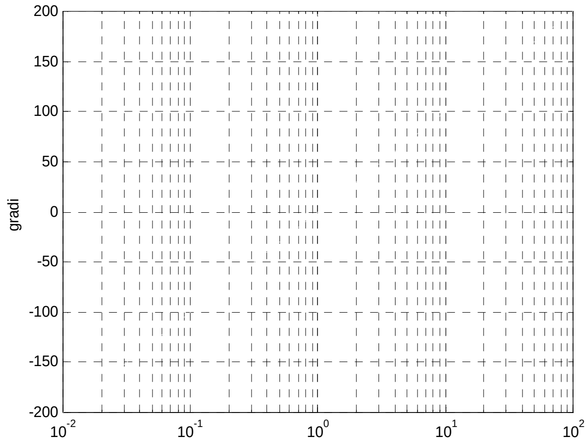
2.3) Calcolare il movimento forzato dell'uscita quando l'ingresso è $u_k = \bar{u}$.

2.4) Si mostri che, mediante la retroazione $u_k = py_k$, dove p è un parametro reale, non è possibile rendere asintoticamente stabile il sistema, qualunque sia il valore di p.

ESERCIZIO 3

3.1) Tracciare i diagrammi di Bode asintotici del modulo e della fase associati alla funzione di trasferimento $G(s) = \dfrac{6(1-20s)}{1+s}$.





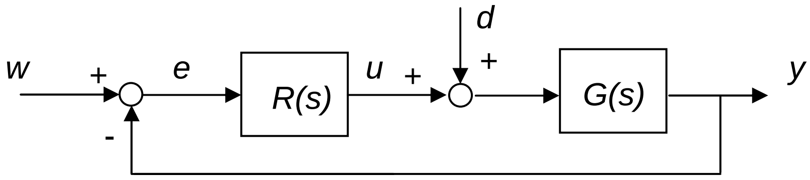
3.2) Spiegare perché il sistema può essere considerato un filtro passa-alto. Valutare poi la sua banda passante.

3.3) Indicando con $u(t)$ e $y(t)$ l'ingresso e l'uscita del sistema, si valuti, in base ai diagrammi di Bode e in modo approssimato, qual è l'andamento a transitorio esaurito di $y(t)$ in risposta a $u(t) = 0.1\mathrm{sca}(t) + 0.5\mathrm{sen}(4t)$.

3.4) Si spieghi come si potrebbe impostare il calcolo esatto di $y(t)$ in risposta a $u(t) = 0.1\mathrm{sca}(t) + 0.5\mathrm{sen}(4t)$. Si valuti inoltre dopo quanto tempo la funzione $y(t)$ così determinata coinciderebbe (in pratica) con l'andamento a transitorio esaurito calcolato al punto 3.3.

ESERCIZIO 4

Si consideri il sistema di controllo mostrato in figura, dove $R(s) = \dfrac{1}{s+5}$, $G(s) = \dfrac{10}{s+2}$.



4.1) Spiegare perché in questo schema l'azione del regolatore si dice *in anello chiuso* e *basata sull'errore*.

4.2) Calcolare la trasformata di Laplace di $u(t)$ quando $w(t) = \mathrm{sca}(t)$ e $d(t) = \mathrm{imp}(t)$.

4.3) A partire dalla trasformata di Laplace di $u(t)$ precedentemente calcolata, determinare il valore di $u(\infty)$.

4.4) Mediante il criterio di Nyquist, verificare che il sistema di controllo è asintoticamente stabile.