ESERCIZIO 1

Si consideri il sistema dinamico a tempo continuo descritto dalle seguenti equazioni:

$$\dot{x}_1(t) = -10x_1(t) + 15x_2(t) + u(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = -20x_1(t) + 6x_2(t) + \alpha u(t)$$
$$y(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

dove α è un parametro reale.

1.1) Valutare l'asintotica stabilità del sistema.

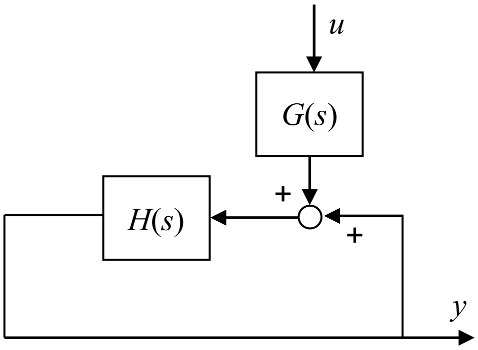
1.2) Calcolare la funzione di trasferimento tra $u(t)$ e $y(t)$.

1.3) Dopo aver spiegato cosa si intende per *fenomeno di risonanza*, dire se il sistema in esame presenta tale fenomeno.

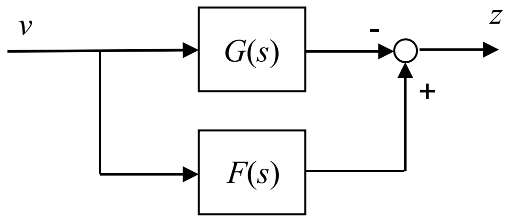
1.4) Determinare i valori del parametro α per cui il guadagno statico è positivo e la risposta del sistema a uno scalino presenta una sottoelongazione iniziale.

ESERCIZIO 2

Si considerino i due schemi a blocchi mostrati in figura, dove $G(s)=\dfrac{1}{s+2}$ e $H(s)=\dfrac{4}{s}$.



(a)



(b)

2.1) Con riferimento allo schema a blocchi (a) calcolare la funzione di trasferimento $G_{yu}(s)$ tra l'ingresso $u(t)$ e l'uscita $y(t)$ e verificare che il sistema complessivo è instabile.

2.2) Sempre con riferimento allo schema a blocchi (a), calcolare mediante lo sviluppo di Heaviside la risposta di $y(t)$ all'ingresso $u(t)=\text{imp}(t)$.

2.3) Con riferimento allo schema a blocchi (b), determinare $F(s)$ in modo che la risposta $z(t)$ all'ingresso $v(t)=\text{imp}(t)$ sia identica alla $y(t)$ calcolata al punto precedente.

ESERCIZIO 3

Si considerino i seguenti comandi Matlab che descrivono due sistemi dinamici:

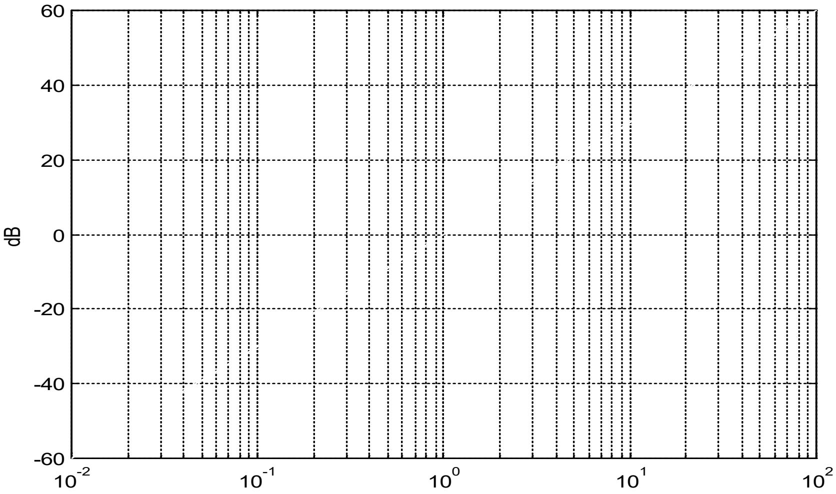
```
» sist1 = ss(4,3,2,1);
» sist2 = tf([1  2], [1  -4]);
```

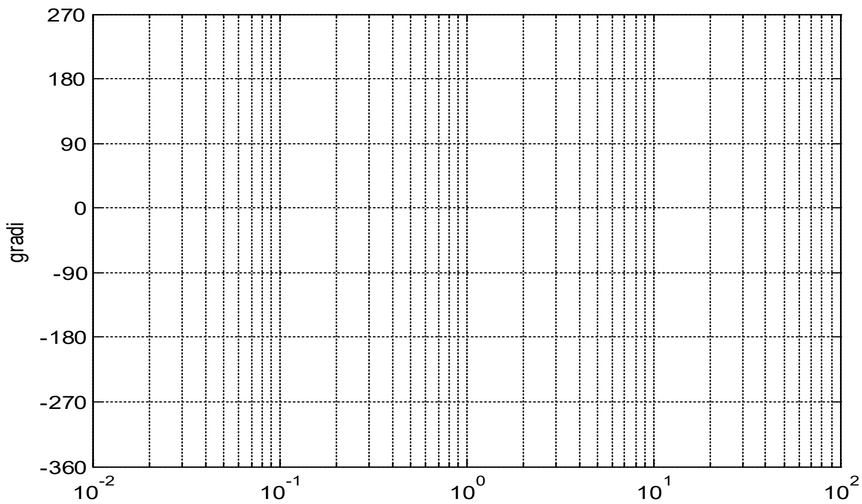
e si verifichi che sist1 e sist2 descrivono lo stesso legame ingresso/uscita.

ESERCIZIO 4

Si consideri un sistema con funzione di trasferimento $G(s) = \dfrac{0.1(1+20s)}{(1+0.1s)}$.

4.1) Tracciare i diagrammi asintotici di Bode associati a $G(s)$.





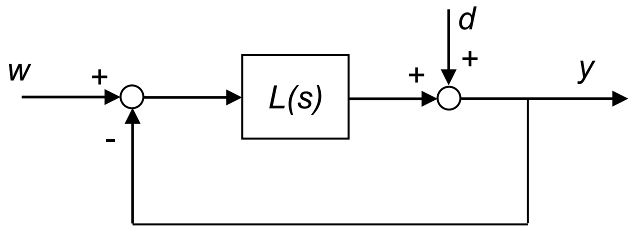
4.2) Dai diagrammi valutare approssimativamente l'amplificazione e lo sfasamento dell'uscita a transitorio esaurito rispetto all'ingresso $u(t) = \mathrm{sen}(\pi t)$.

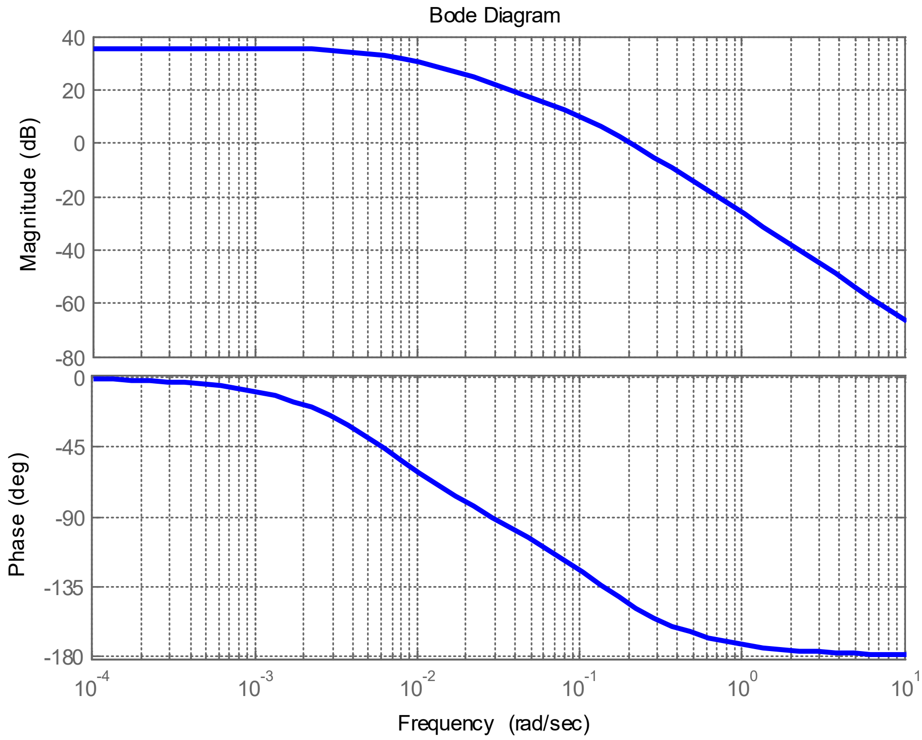
4.3) Discutere di che tipo è l'azione filtrante del sistema e valutare la sua banda passante.

4.4) Dopo aver spiegato cosa rappresenta la funzione di trasferimento $H(s) = e^{-0.2s}$, dire come si modificherebbe la risposta alla precedente domanda 4.2 se si considerasse la funzione di trasferimento $\overline{G}(s) = G(s)H(s)$.

ESERCIZIO 5

Si consideri il sistema di controllo mostrato in figura, in cui $L(s)$ è una funzione di trasferimento asintoticamente stabile, a cui sono associati i diagrammi di Bode sotto riportati.





5.1) Verificare che il sistema di controllo è asintoticamente stabile.

5.2) Giudicare se la stabilità del sistema è robusta rispetto a incertezze sul guadagno della funzione d'anello.

5.3) Fornire un'approssimazione a poli dominanti della funzione di trasferimento tra il riferimento $w(t)$ e la variabile controllata $y(t)$.

5.4) Valutare di quanto viene attenuato a regime l'effetto del disturbo $d(t) = \text{sca}(t)$.

SOLUZIONE DELL'ESERCIZIO 1

1.1) Il sistema è descritto dalle matrici:

$$A = \begin{bmatrix} -10 & 15 \\ -20 & 6 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \end{bmatrix} \quad , \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Il polinomio caratteristico associato ad A vale:

$$\varphi(\lambda) = det\begin{bmatrix} \lambda + 10 & -15 \\ 20 & \lambda - 6 \end{bmatrix} = \lambda^2 + 4\lambda + 240$$

Poiché $\varphi(\lambda)$ è di secondo grado e i suoi coefficienti sono diversi da zero e concordi in segno, si conclude che entrambi gli autovalori hanno parte reale negativa e il sistema è asintoticamente stabile.

1.2) Si ricava:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{(1+\alpha)s + 25\alpha - 26}{s^2 + 4s + 240}$$

1.3) Il fenomeno di risonanza corrisponde a un'amplificazione elevata dell'uscita in risposta a un ingresso sinusoidale per un ristretto intervallo di pulsazioni. Si verifica quando il sistema possiede una coppia di poli complessi coniugati con pulsazione naturale ω_n e smorzamento ξ basso. Se la pulsazione dell'ingresso sinusoidale è vicina a ω_n, l'uscita a regime risulta fortemente amplificata.

Poiché il sistema in esame possiede poli complessi coniugati con $\omega_n = 4\sqrt{15}$ e $\xi = \dfrac{2}{4\sqrt{15}} \cong 0.13$, il fenomeno di risonanza è presente.

1.4) Dall'espressione di $G(s)$, il guadagno statico vale $\mu = G(0) = \dfrac{25\alpha - 26}{240}$, ed è positivo quando $\alpha > 26/25$.

La sottoelongazione iniziale è presente se lo zero di $G(s)$ è positivo, cioè quando $\dfrac{26 - 25\alpha}{1+\alpha} > 0$.

Quest'ultima disuguaglianza è verificata per $-1 < \alpha < 26/25$.

In conclusione, non esistono valori di α per cui entrambe le condizioni sono soddisfatte.

SOLUZIONE DELL'ESERCIZIO 2

2.1) Risulta

$$G_{yu}(s)=\frac{G(s)H(s)}{1-H(s)}=\frac{4}{(s+2)(s-4)}$$

Poiché tale funzione di trasferimento ha un polo positivo, il sistema è instabile.

2.2) Svolgendo lo sviluppo di Heaviside di $Y(s)=\dfrac{4}{(s+2)(s-4)}=\dfrac{\alpha}{s+2}+\dfrac{\beta}{s-4}$ si trova $\alpha=-2/3$, $\beta=2/3$. Pertanto la risposta all'impulso è:

$$y(t)=-\frac{2}{3}e^{-2t}+\frac{2}{3}e^{4t} \quad , \quad t\geq 0$$

2.3) Deve essere

$$G_{zv}(s)=F(s)-G(s)=\frac{4}{(s+2)(s-4)}$$

da cui

$$F(s)=\frac{4}{(s+2)(s-4)}+\frac{1}{s+2}=\frac{s}{(s+2)(s-4)}$$

SOLUZIONE DELL'ESERCIZIO 3

La variabile sist1 corrisponde al sistema di ordine 1 descritto dalla rappresentazione di stato:

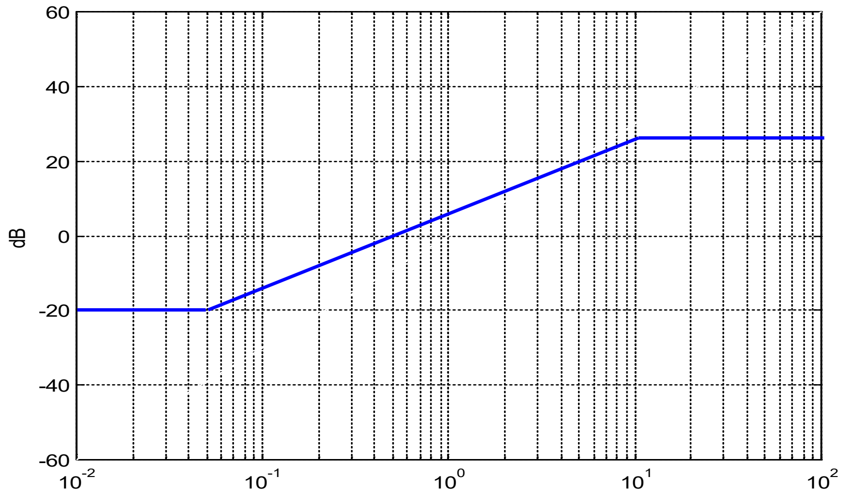
$$\dot{x}(t) = 4x(t) + 3u(t)$$
$$y(t) = 2x(t) + u(t)$$

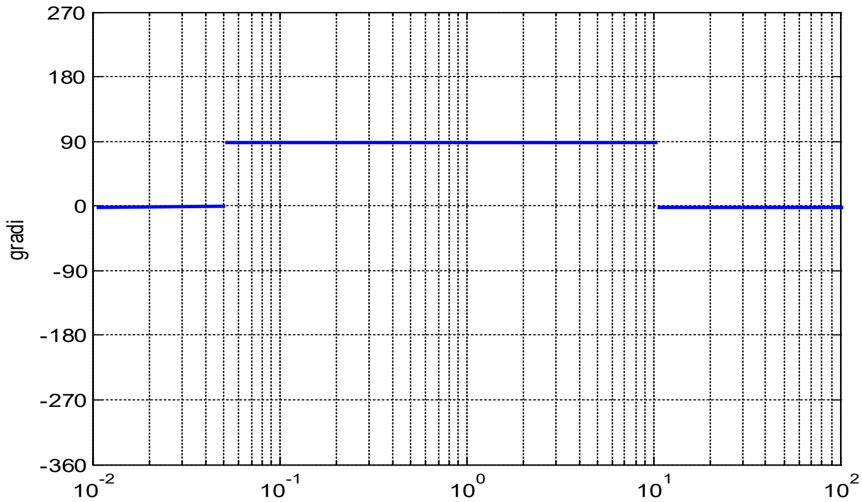
il cui legame ingresso/uscita è descritto dalla funzione di trasferimento $G(s) = \dfrac{6}{s-4} + 1 = \dfrac{s+2}{s-4}$.

Il comando relativo a sist2 genera direttamente la funzione di trasferimento $G(s) = \dfrac{s+2}{s-4}$, che coincide con la precedente.

SOLUZIONE DELL'ESERCIZIO 4

4.1)





4.2) Dai diagrammi asintotici si ricava $|G(j\pi)|_{dB} \cong 16$ dB (e quindi $|G(j\pi)| \cong 10^{16/20} \cong 6$) e $\arg G(j\pi) = 90°$. In realtà, calcolando le stesse quantità per via analitica si trova $|G(j\pi)| \cong 5.98$ e $\arg G(j\pi) = 72°$. Si noti che quest'ultimo valore è un po' diverso da quello ottenuto attraverso il diagramma asintotico.

4.3) Dalla forma del diagramma del modulo si deduce che il sistema è un filtro passa-alto (infatti amplifica maggiormente le componenti dell'ingresso a frequenza elevata). La sua banda passante è $B \cong [10, \infty)$.

4.4) La funzione di trasferimento $H(s)$ rappresenta un ritardo di tempo pari a 0.2 unità di tempo.
Il modulo di $\overline{G}(j\omega) = G(j\omega)H(j\omega)$ è identico a quello di $G(j\omega)$, mentre

$$\arg \overline{G}(j\omega) = \arg G(j\omega) - \omega\tau \frac{180°}{\pi}$$

Quindi, l'uscita avrebbe la stessa ampiezza calcolata al punto 4.2, ma il suo sfasamento sarebbe uguale a $72° - 36° = 36°$.

SOLUZIONE DELL'ESERCIZIO 5

5.1) Il criterio di Bode è applicabile perché $P=0$ (dal testo) e il diagramma del modulo di $L(j\omega)$ attraversa l'asse a 0 dB una sola volta dall'alto verso il basso.
Dal diagramma del modulo si osserva che $|\mu|_{dB} \cong 36\ \text{dB}$, ovvero $|\mu| \cong 60$. Inoltre, dal diagramma della fase si nota che il guadagno d'anello è positivo (quindi $\mu \cong 60$). Anche il margine di fase φ_m è positivo (dai diagrammi si ricava infatti $\omega_c \cong 0.2$, $\varphi_m \cong 35°$). Pertanto, grazie al criterio di Bode, il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile.

5.2) Si noti che il diagramma della fase non scende mai sotto il valore $-180°$. Pertanto si può affermare che il margine di guadagno k_m è infinito. Ciò significa che la stabilità del sistema è infinitamente robusta rispetto a incertezze sul guadagno d'anello (purché rimanga positivo).

5.3) Il guadagno di $F(s)$ è $\mu_F = \dfrac{\mu}{1+\mu} \cong \dfrac{60}{61}$. I poli dominanti sono complessi coniugati con pulsazione naturale $\omega_n \cong \omega_c \cong 0.2$ e smorzamento $\xi \cong \varphi_m / 100 \cong 0.35$. Infine, dai diagrammi non sembra che $L(s)$ abbia zeri. Quindi, l'approssimazione a poli domimanti è:

$$\tilde{F}(s) = \frac{\mu_F \omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \cong \frac{0.039}{s^2 + 0.14s + 0.04}$$

5.4) Il fattore di attenuazione è il guadagno μ_S della funzione di sensitività $S(s) = 1/(1+L(s))$. Poiché il tipo della funzione d'anello è $g=0$, risulta $\mu_S = \dfrac{1}{1+\mu} \cong \dfrac{1}{61}$.