ESERCIZIO 1

Si consideri il sistema dinamico a tempo continuo descritto dalle seguenti equazioni:

$$\dot{x}_1(t) = \alpha(4x_2(t) - 5u(t))^2 - \frac{1}{2}\big(x_1(t) - x_2(t)\big)$$
$$\dot{x}_2(t) = \frac{1}{10}\big(2x_2(t) - 10x_1(t)\big) + u(t)$$
$$y(t) = x_2(t)$$

e si supponga inizialmente $\alpha = 0$.

1.1) Verificare che, per un valore fissato $u(t) = \bar{u}$, il sistema ammette un unico stato di equilibrio $\bar{x}$, da calcolare.

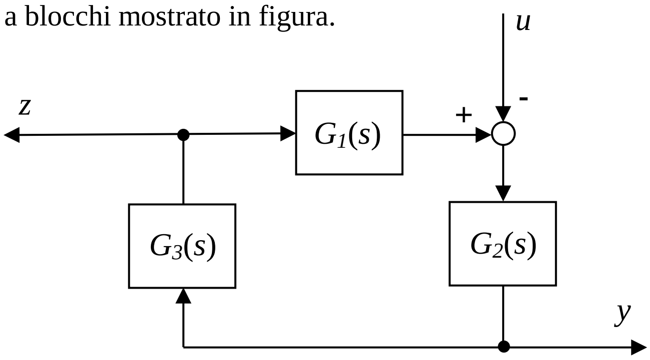
1.2) Giudicare la stabilità dello stato di equilibrio $\bar{x}$.

1.3) Sempre con $\alpha = 0$, calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ tra l'ingresso u e l'uscita y. Ricavare poi la pulsazione naturale e lo smorzamento dei poli di $G(s)$ e valutare il tempo di assestamento della risposta del sistema a uno scalino.

1.4) Si ponga ora $\alpha = 1$ e si verifichi che lo stato di equilibrio associato a $u(t) = \bar{u}$ rimane identico a quello ottenuto al punto 1.1 e possiede ancora la stessa proprietà di stabilità.

ESERCIZIO 2

Si consideri lo schema a blocchi mostrato in figura.



2.1) Ricavare le funzioni di trasferimento che legano tra loro l'ingresso u e le uscite y e z.

2.2) Supponendo ora che sia $G_1(s) = G_2(s) = G_3(s) = \frac{1}{s}$, giudicare la stabilità del sistema complessivo.

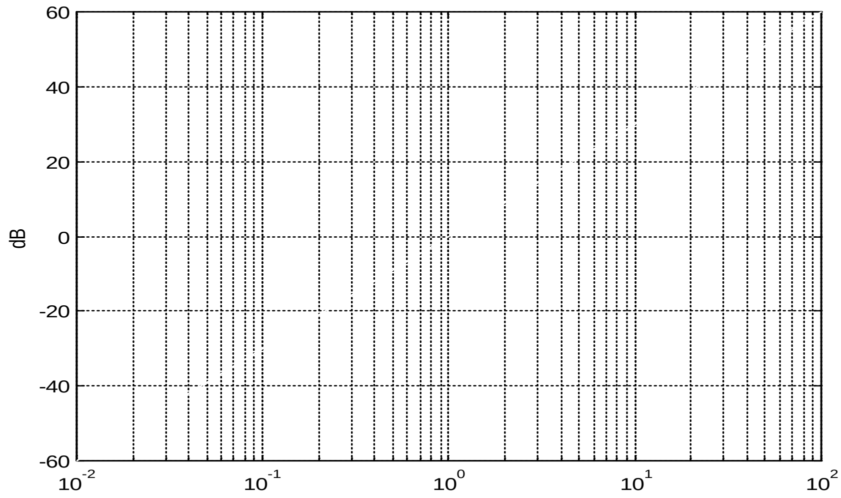
2.3) Dire, motivando la risposta, se il sistema può stare in equilibrio con l'ingresso costante $\bar{u} = 10$.

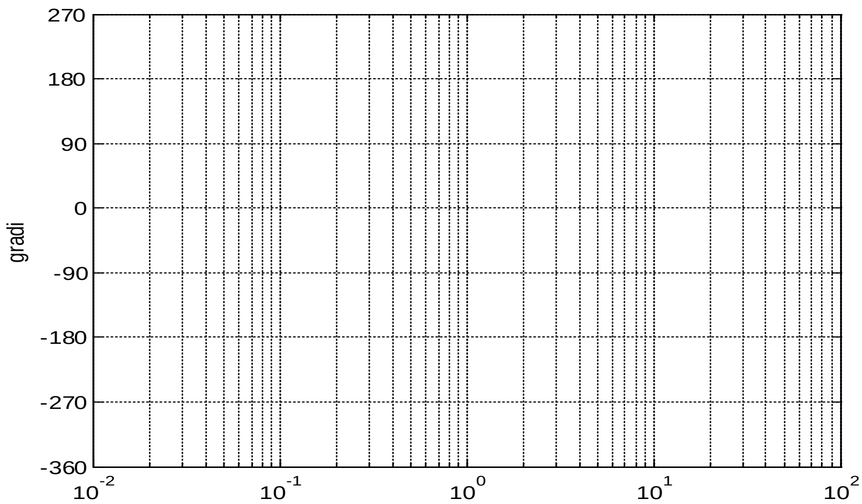
ESERCIZIO 3

Si consideri un sistema, con ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$, descritto dalla funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{2 + 0.2s}{s}$$

3.1) Tracciare i diagrammi asintotici di Bode associati a $G(s)$.





3.2) Calcolare analiticamente $|G(j2)|$ e $\arg G(j2)$, verificando poi che tali valori sono coerenti con quelli che si leggono sui diagrammi di Bode.

3.3) Calcolare la risposta del sistema all'ingresso $u(t) = \text{sen}(2t)$.

3.4) Mediante il teorema del valore iniziale, calcolare il valore iniziale $y(0)$ e la pendenza iniziale $\dot{y}(0)$ della risposta del sistema all'ingresso $u(t) = \text{sen}(2t)$. Verificare poi la coerenza di tali valori con quelli ricavabili dalla risposta $y(t)$ ottenuta al punto precedente.

ESERCIZIO 4

Si debba controllare in anello chiuso un sistema descritto dalla seguente relazione nel dominio della trasformata di Laplace:

$$Y(s) = \frac{0.1}{1 + 0.5s} U(s) + D(s)$$

dove $y(t)$ è la variabile controllata, $u(t)$ è la variabile di controllo e $d(t)$ è un disturbo. A tale scopo si utilizzi il regolatore:

$$R(s) = \frac{8(1 + 0.5s)}{s}$$

4.1) Disegnare lo schema a blocchi del sistema di controllo.

4.2) Valutare la pulsazione critica ω_c del sistema di controllo. Spiegare poi almeno un motivo per cui, in un generico sistema di controllo, è opportuno ottenere un valore elevato di ω_c e almeno un motivo per cui invece è conveniente mantenere ω_c non troppo elevata.

4.3) Valutare la capacità del sistema di controllo considerato di attenuare a regime l'effetto del disturbo $d(t) = 5 + \mathrm{sen}(0.1t)$.

ESERCIZIO 5

Si considerino le seguenti istruzioni Matlab e si individuino quelle la cui esecuzione produrrebbe un messaggio d'errore, spiegandone le ragioni.
Invece, per quelle corrette, si dica quale sarebbe il valore della variabile in uscita.

```
» x = dcgain(tf(3, [1 2]));

» x = roots([1  -3  2]);

» x = det([1  -2  3  0]);

» x = eig([-1  0 ; 2  -3]);
```

SOLUZIONE DELL'ESERCIZIO 1

1.1) Con $\alpha = 0$, il sistema diventa lineare ed è descritto da:

$$\dot{x}_1(t) = -\frac{1}{2}\big(x_1(t) - x_2(t)\big)$$
$$\dot{x}_2(t) = \frac{1}{10}\big(2x_2(t) - 10x_1(t)\big) + u(t)$$
$$y(t) = x_2(t)$$

ovvero dalle matrici $A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $C = [0 \quad 1]$, $D = 0$.

Poiché la matrice A è invertibile, per ogni valore fissato $u(t) = \bar{u}$ il sistema ammette un unico stato di equilibrio $\bar{x}$. Calcolandolo (per esempio ponendo a zero le derivate nel tempo) si ottiene:

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} \\ \frac{5}{4} \end{bmatrix} \bar{u}$$

1.2) Poiché il sistema è lineare, la stabilità dello stato di equilibrio $\bar{x}$ coincide con la stabilità del sistema e può essere valutata dagli autovalori della matrice A. Il polinomio caratteristico di tale matrice è:

$$\varphi(\lambda) = \lambda^2 + 0.3\lambda + 0.4$$

che ha grado 2 e coefficienti concordi in segno. Quindi entrambe le sue radici (autovalori di A) hanno parte reale negativa e dunque lo stato di equilibrio è asintoticamente stabile.

1.3) La funzione di trasferimento $G(s)$ tra l'ingresso u e l'uscita y vale:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{s + 0.5}{s^2 + 0.3s + 0.4}$$

Dal denominatore si ricavano:

$$\omega_n = \sqrt{0.4} \cong 0.63 \quad , \quad \xi = 0.3/2\omega_n \cong 0.24 \quad , \quad t_a \cong 5/\xi\omega_n \cong 33.3$$

1.4) In corrispondenza dello stato di equilibrio ricavato in precedenza, il termine che moltiplica α nella prima equazione di stato si annulla e pertanto è immediato verificare che lo stato di equilibrio associato a $u(t) = \bar{u}$, quando $\alpha = 1$, rimane identico a quello ottenuto al punto 1.1.

Per studiarne la stabilità occorre riferirsi alla matrice dinamica del sistema linearizzato:

$$f_x(\bar{x}, \bar{u}) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} + 8(4\bar{x}_2 - 5\bar{u}) \\ -1 & \frac{1}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{5} \end{bmatrix} = A$$

Come visto in predenza, tale matrice ha autovalori con parte reale negativa e quindi lo stato di equilibrio è ancora asintoticamente stabile.

SOLUZIONE DELL'ESERCIZIO 2

2.1) Dallo schema a blocchi risulta:

$$G_{yu}(s) = \frac{-G_2(s)}{1-G_1(s)G_2(s)G_3(s)} \quad , \quad G_{zu}(s) = \frac{-G_2(s)G_3(s)}{1-G_1(s)G_2(s)G_3(s)}$$

2.2) Ponendo $G_1(s) = G_2(s) = G_3(s) = \frac{1}{s}$, si ottiene:

$$G_{yu}(s) = \frac{-s^2}{s^3-1} \quad , \quad G_{zu}(s) = \frac{-s}{s^3-1}$$

I poli di tali funzioni sono gli autovalori del sistema complessivo. Osservando che

$$s^3 - 1 = (s-1)(s^2+s+1)$$

si nota che uno dei poli è in $s = 1 > 0$ e quindi il sistema è instabile.

2.3) Si indichino con x_1, x_2 e x_3 le rispettive uscite dei blocchi $G_i(s), i = 1,2,3$. All'equilibrio gli ingressi degli integratori devono essere nulli. Perciò, quando l'ingresso è $\bar{u} = 10$, in condizioni di equilibrio deve risultare:

$$\bar{x}_1 = \bar{u} = 10 \quad , \quad \bar{x}_2 = \bar{y} = 0 \quad , \quad \bar{x}_3 = \bar{z} = 0$$

Il sistema può quindi rimanere in equilibrio con questi valori delle variabili. Naturalmente, vista la discussione precedente, tale equilibrio è instabile.

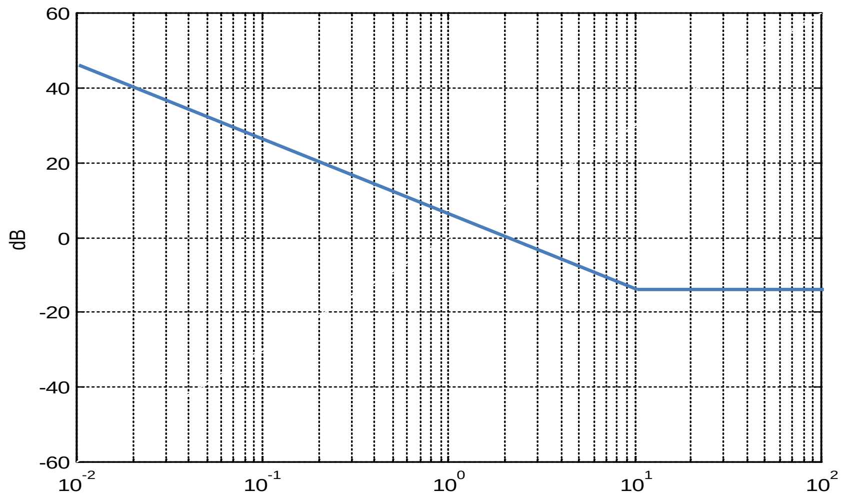
Allo stesso risultato si arriva se si scrivono le equazioni di stato del sistema complessivo:

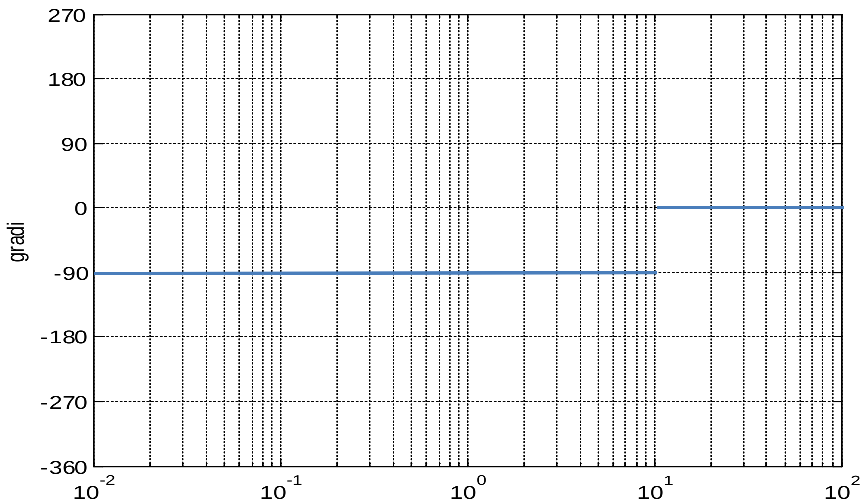
$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= x_3(t) \\
\dot{x}_2(t) &= x_1(t) - u(t) \\
\dot{x}_3(t) &= x_2(t)
\end{aligned}$$

e si calcola l'equilibrio ponendo a zero le derivate.

SOLUZIONE DELL'ESERCIZIO 3

3.1)





3.2) Analiticamente si ricava:

$$|\mathrm{G(j2)}| = \frac{2|1+j0.2|}{|j2|} = \sqrt{1.04} \cong 1$$

$$\mathrm{argG(j2)} = -90° + \mathrm{arctg}(0.2) \cong -90° + 11° = -79°$$

Tali valori sono coerenti con quelli ricavabili dai diagrammi di Bode. Infatti, in $\omega = 2$, si vede che il modulo è intorno a 0 dB (che corrisponde a modulo unitario) e la fase è vicina a -90°, ma c'è un errore dovuto all'approssimazione asintotica.

3.3) Si noti che non si può applicare il teorema della risposta in frequenza perché il sistema non è asintoticamente stabile. Occorre quindi procedere con lo sviluppo di Heaviside. Poiché la trasformata di $u(t) = \mathrm{sen}(2t)$ è $\mathrm{U(s)} = \frac{2}{s^2+4}$, risulta:

$$\mathrm{Y(s)} = \mathrm{G(s)\,U(s)} = \frac{4(1+0.1s)}{s(s^2+4)} = \frac{\alpha}{s} + \frac{\beta s+\gamma}{s^2+4}$$

Uguagliando i numeratori si ricava $\alpha = 1, \beta = -1, \gamma = 0.4$. Pertanto la risposta dell'uscita è

$$y(t) = 1 + 0.2\mathrm{sen}(2t) - \cos(2t)\,, \quad t \geq 0.$$

3.4) Applicando il teorema del valore iniziale a $\mathrm{Y}(s)$ e alla trasformata $s\mathrm{Y}(\mathrm{s})-y(0)$ della derivata prima, si ottiene, rispettivamente:

$$\mathrm{y}(0)=\lim_{s\to\infty} sY(s)=0$$

$$\dot{\mathrm{y}}(0)=\lim_{s\to\infty} s^2Y(s)=0.4$$

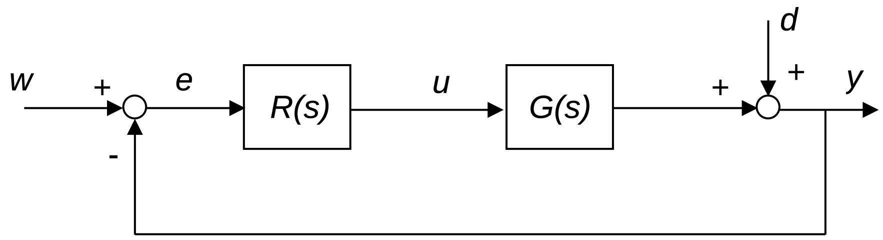
Il primo valore è coerente con l'espressione di $y(t)$ ottenuta in precedenza. Riguardo al valore iniziale della pendenza, si trova che:

$$\dot{y}(t)=0.4\cos(2t)+2\,\mathrm{sen}(2t)\,,\ \ t\geq 0$$

e quindi anche il calcolo di $\dot{\mathrm{y}}(0)=0.4$ risulta coerente.

SOLUZIONE DELL'ESERCIZIO 4

4.1) Lo schema a blocchi del sistema di controllo è il seguente:



4.2) Si noti che la funzione d'anello è:

$$L(s) = R(s)G(s) = \frac{0.8}{s}$$

La pulsazione critica è quindi $\omega_c = 0.8$.

I motivi per cui, in un generico sistema di controllo, è opportuno ottenere un valore elevato di ω_c sono i seguenti:

- Aumento della velocità di inseguimento del riferimento w.
- Migliore capacità di attenuare il disturbo d anche a frequenza elevata.

I principali motivi per cui invece è conveniente mantenere ω_c non troppo elevata sono i seguenti:

- Robustezza della stabilità a fronte di eventuali ritardi di tempo.
- Moderazione dell'azione di conrollo.
- Attenuazione di eventuali disturbi di misura.

4.3) Ponendo $d_1(t) = 5$ e $d_2(t) = \mathrm{sen}(0.1t)$, possiamo scomporre il disturbo nelle sue componenti $d(t) = d_1(t) + d_2(t)$ e analizzarne separatamente l'effetto sulla variabile controllata $y(t)$.

L'effetto della componente costante $d_1(t)$ è nullo a regime, grazie alla presenza di un polo nell'origine nella funzione d'anello $\mathrm{L}(s)$.

Indicando con $\mathrm{S(s) = L(s)/(1 + L(s))}$ la funzione di sensitività, l'effetto della componente sinusoidale $d_2(t) = \mathrm{sen}(0.1t)$ risulta attenuato, a regime, di un fattore $|\mathrm{S(j0.1)}| \cong |\mathrm{L(j0.1)}|^{-1} = 0.125$. Si noti che quest'ultima valutazione discende dall'osservazione che la pulsazione del disturbo è inferiore alla pulsazione critica $\omega_c = 0.8$.

SOLUZIONE DELL'ESERCIZIO 5

» x = dcgain(tf(3, [1 2]));

L'istruzione calcola il guadagno statico della funzione di trasferimento $\frac{3}{s+2}$. Quindi la variabile in uscita x assume il valore 1.5 .

» x = roots([1 -3 2]);

L'istruzione calcola le radici del polinomio $s^2 - 3s + 2$. Quindi la variabile in uscita x è un vettore che contiene i valori 1 e 2 .

» x = det([1 -2 3 0]);

Questa istruzione produce un messaggio d'errore perché è impossibile calcolare il determinante di un vettore.

» x = eig([-1 0 ; 2 -3]);

L'istruzione calcola gli autovalori della matrice $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$.
Trattandosi di una matrice triangolare, gli autovalori coincidono con gli elementi sulla diagonale. Quindi la variabile in uscita x è un vettore che contiene i valori -1 e -3 .