ESERCIZIO 1

Si consideri il sistema dinamico a tempo continuo descritto dalle seguenti equazioni:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \qquad A = \begin{bmatrix} \alpha & 2 \\ 5\alpha & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$y(t) = Cx(t)$$

dove α è un parametro reale.

1.1) Verificare che il guadagno statico μ_s è den definito e non dipende dal valore di α. In base al risultato, dire quale ingresso costante andrebbe applicato perché l'uscita di equilibrio sia $\bar{y} = 10$.

1.2) Discutere la stabilità del sistema al variare del parametro α.

1.3) Ponendo $\alpha = 1$, dire se il sistema presenta dei modi oscillanti e calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ del sistema.

1.1) - IMPONENDO L'EQUILIBRIO, SI OTTIENE:

$$\begin{cases} \bar{x}_1 = \dfrac{1}{3\alpha}\bar{u} \\ \bar{x}_2 = \bar{y} = -\dfrac{5}{3}\bar{u} \end{cases} \Longrightarrow \boxed{\mu_s = \frac{\bar{y}}{\bar{u}} = -\frac{5}{3}}$$

BEN DEFINITO
NON DIPENDE DA α

- PER AVERE $\bar{y} = 10$ OCCORRE $\boxed{\bar{u} = \dfrac{\bar{y}}{\mu_s} = -6}$

1.2) $\varphi(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^2 - (1+\alpha)\lambda - 9\alpha$

- PER IL CRITERIO DI CARTESIO:

$$\boxed{\text{AS. STAB.}} \Longleftrightarrow \begin{cases} 1+\alpha < 0 \\ 9\alpha < 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \boxed{\alpha < -1}$$

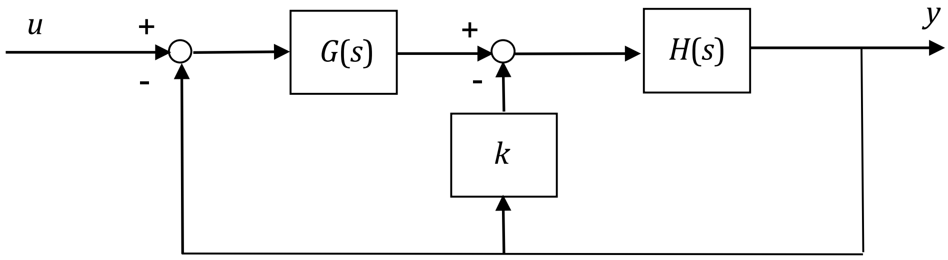
1.3) CON $\alpha = 1$:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \dots = \boxed{\frac{15}{s^2 - 2s - 9}}$$

POLI: $1 \pm \sqrt{10}$ (REALI) $\Longrightarrow$ MODI ESPONENZIALI (NON OSCILLANTI)

ESERCIZIO 2

Si consideri il sistema descritto dal seguente schema a blocchi, dove $G(s) = \frac{4}{s+2}$ e $H(s) = \frac{1}{s}$.



2.1) Supponendo dapprima $k = 0$, calcolare la funzione di trasferimento $G_{yu}(s)$ tra u e y.

2.2) Sempre con $k = 0$, calcolare la risposta $y(t), t \geq 0$, all'ingresso $u(t) = \text{sca}(t)$.

2.3) Dire come cambia la funzione di trasferimento $G_{yu}(s)$ tra u e y nel caso in cui $k = 1$.

2.1) con $k=0$, $G_{yu}(s) = \frac{G(s)H(s)}{1+G(s)H(s)} = \frac{4}{s^2+2s+4}$

2.2) $Y(s) = \frac{4}{s(s^2+2s+4)} = \frac{\alpha}{s} + \frac{\beta s + \gamma}{s^2+2s+4}$ $\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = -1 \\ \gamma = -2 \end{cases}$

(HEAVISIDE)

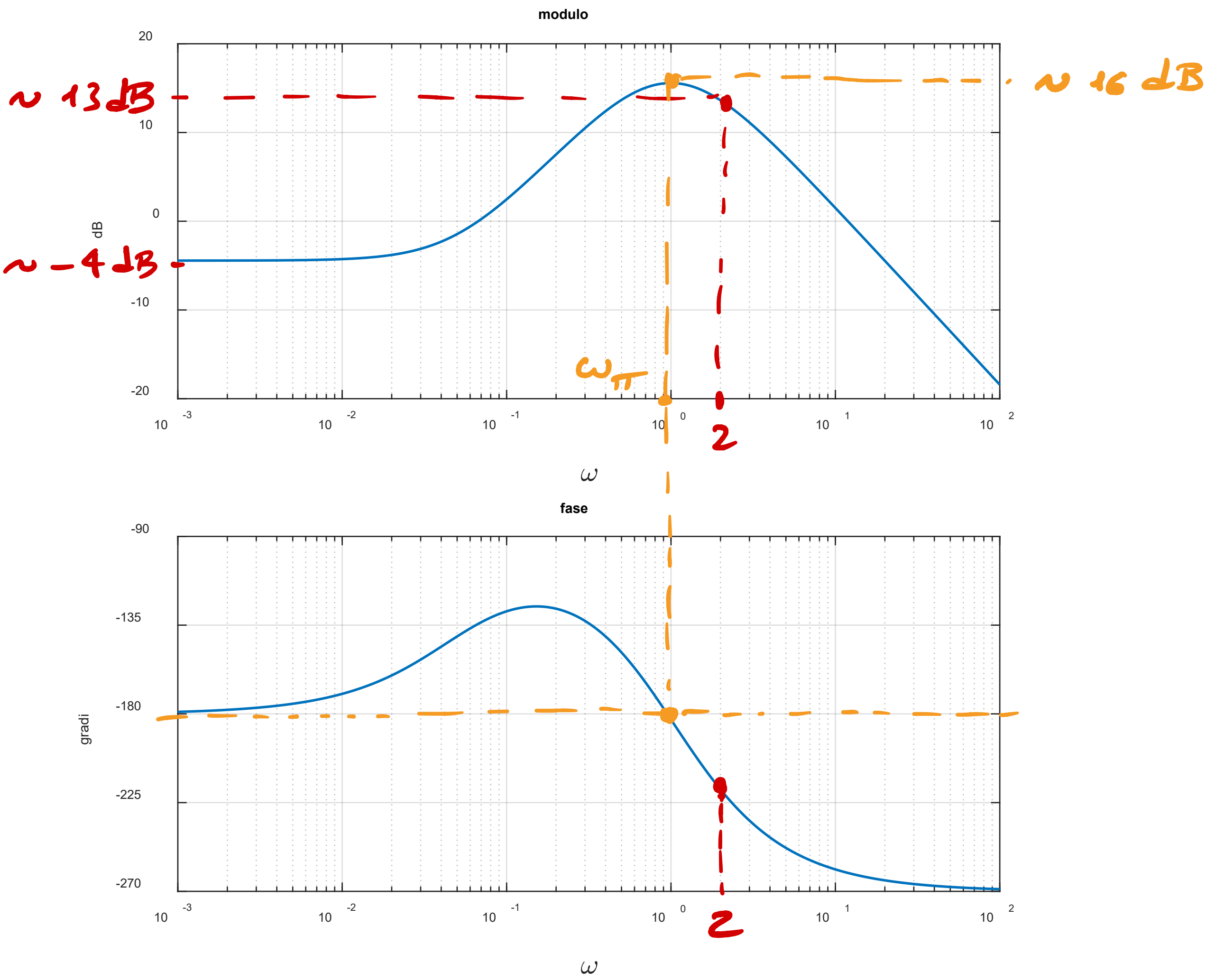
$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{s+2}{(s+1)^2+3} = \frac{1}{s} - \frac{s+1}{(s+1)^2+3} - \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}}{(s+1)^2+3}$$

$$\Rightarrow y(t) = 1 - e^{-t}\left(\cos\sqrt{3}t + \frac{1}{\sqrt{3}}\text{sen}\sqrt{3}t\right), \quad t \geq 0$$

2.3) con $k=1$, $G_{yu}(s) = \frac{G(s)H(s)}{1+(k+G(s))H(s)} = \frac{4}{s^2+3s+6}$

ESERCIZIO 3

Nella seguente figura sono riportati i diagrammi di Bode associati a una funzione di trasferimento $G(s)$ di un sistema asintoticamente stabile.



3.1) In base ai diagrammi di Bode, valutare l'andamento a regime dell'uscita $y(t)$ in risposta all'ingresso $u(t) = 5\ \mathrm{sen}(2t)$.

3.2) Motivando la risposta, dire quale delle seguenti espressioni di $G(s)$ è più plausibile. Valutare inoltre il parametro k.

[a] $G(s) = \frac{k(1+0.05s)}{(1+s)^2}$ [b] $G(s) = \frac{k(1-20s)}{(1+s)^2}$ [c] $G(s) = \frac{k(1-0.05s)}{(1+s)^2}$ [d] $G(s) = \frac{k(1+20s)}{(1+s)^2}$

3.3) Tracciare l'andamento qualitativo del diagramma polare associato a $G(s)$. Valutare poi l'ascissa del punto in cui tale diagramma attraversa l'asse reale.

3.1) - IL SISTEMA È AS. STABILE - A REGIME:

$$y(t) \simeq 5\,|G(j2)|\,\mathrm{sen}\left(2t + \angle G(j2)\right)$$

- DAI DIAGRAMMI DI BODE:

$$|G(j2)|_{dB} \simeq 13\,dB \Longrightarrow |G(j2)| \simeq 10^{13/20} \simeq 4.5$$

$$\angle G(j2) \simeq -220^\circ \simeq -220\,\frac{\pi}{180} \simeq -3.8 \text{ rad}$$

$$\Longrightarrow \boxed{y(t) \simeq 22.5\,\mathrm{sen}(2t - 3.8)}$$

3.2) - L'ESPRESSIONE PIÙ PLAUSIBILE È

$\boxed{[d]}$ $$G(s) = \frac{k(1+20s)}{(1+s)^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} k<0 \quad \text{(DALLA FASE INIZIALE)} \\ |k|_{dB} \simeq -4\,dB \Longrightarrow |k| \simeq 0.6 \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{k \simeq -0.6}$$

3.3)

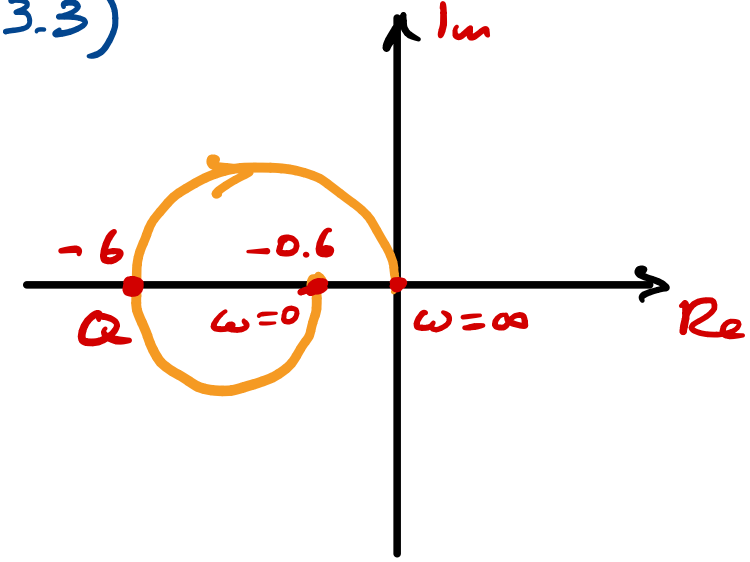


DIAGRAMMA POLARE

- PER TROVARE x_Q

$$\angle G(j\omega) = -180^\circ \Longrightarrow \omega_\pi \simeq 1$$

$$|G(j\omega_\pi)|_{dB} \simeq 16\,dB$$

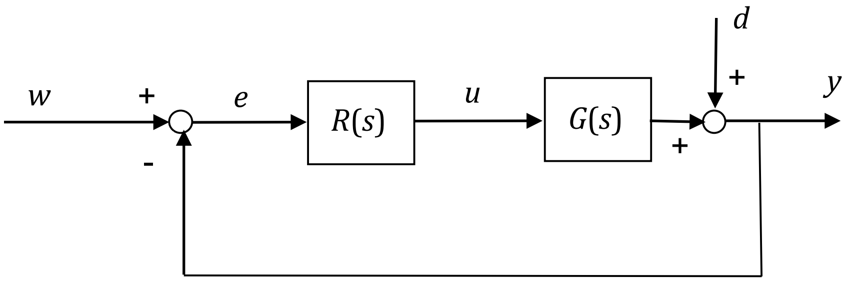
$$|x_Q| = |G(j\omega_\pi)| \simeq 6$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{x_Q \simeq -6}$$

ESERCIZIO 4

Si consideri il sistema di controllo mostrato in figura, dove $R(s) = \frac{5(1+2s)}{s}$, $G(s) = \frac{3}{0.5+s}$



4.1) Calcolare pulsazione critica e margine di fase. Verificare inoltre che il sistema di controllo è asintoticamente stabile.

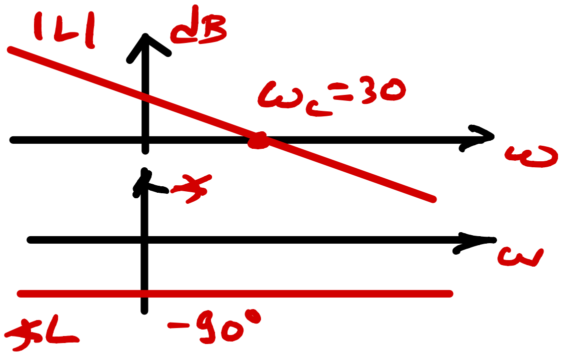
4.2) Valutare la capacità del sistema di controllo di attenuare l'effetto del disturbo $d(t)$, supponendo che il suo spettro $C_d(\omega)$ sia nullo per $\omega \geq 1$.

4.3) Supponendo ora che il disturbo sia nullo, calcolare il valore a transitorio esaurito dell'errore $e(\infty)$ nei seguenti due casi: (a) $w(t) = \text{sca}(t)$; (b) $w(t) = \text{ram}(t)$.

4.1) $L(s) = R(s)G(s) = \frac{30}{s}$

$\omega_c = 30$

$\varphi_c = -90° \Rightarrow \varphi_m = 90°$



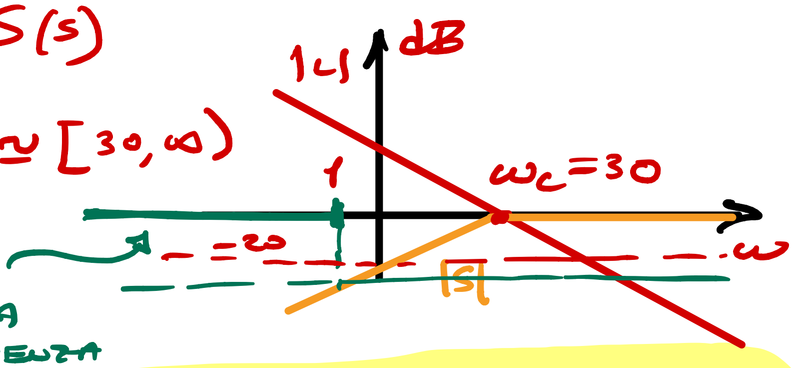
- DAL CRITERIO DI BODE (APPLICABILE): $\begin{cases} \mu = 30 > 0 \\ \varphi_m = 90° > 0° \end{cases} \Rightarrow$ AS. STAB.

4.2) $G_{yd}(s) = \frac{1}{1+L(s)} = S(s)$

PASSA-ALTO CON $B \simeq [30, \infty)$

$C_d(\omega) = 0, \ \omega \geq 1$

DISTURBO A BASSA FREQUENZA



$\Rightarrow$ IL DISTURBO VIENE ATTENUATO CON FATTORE DI ATTENUAZIONE $\simeq \frac{1}{|L(j\omega)|} < -20\,dB$, $\omega \leq 1$

4.3) $G_{ew}(s) = \dfrac{1}{1+L(s)} = \dfrac{s}{s+30}$

(a) $w(t) = \mathrm{sca}(t)$, $W(s) = \dfrac{1}{s}$

$$\boxed{e(\infty) = \lim_{s\to 0} s\, G_{ew}(s)\, W(s) = \lim_{s\to 0} \frac{s}{s+30} = 0}$$

(b) $w(t) = \mathrm{ram}(t)$, $W(s) = \dfrac{1}{s^2}$

$$\boxed{e(\infty) = \lim_{s\to 0} s\, G_{ew}(s)\, W(s) = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s+30} = \frac{1}{30}}$$

- D'ALTRA PARTE, $L(s)$ HA TIPO $g=1$ E GUADAGNO $\mu=30$

- I RISULTATI SONO COERENTI CON LA TEORIA.