ESERCIZIO 1

Si consideri il sistema dinamico di ordine $n = 1$ descritto dalle seguenti equazioni:

$$\dot{x}(t) = 2x(t) - kx^3(t) + \frac{1}{4}u(t)$$
$$y(t) = x(t)$$

dove k è un parametro reale.

1. 1) Con $k = 0$, calcolare il movimento dell'uscita quando $u(t) = \text{sca}(t)$ e $x(0) = -1$.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 2x(t) + \frac{1}{4}u(t) \\ y(t) = x(t) \end{cases}$$

$$y(t) = e^{2t}\cdot(-1) + \int_0^t e^{2(t-\tau)}\frac{1}{4}\,d\tau = -e^{2t} + \frac{1}{4}e^{2t}\int_0^t e^{-2\tau}d\tau =$$

$$= -e^{2t} + \frac{1}{4}e^{2t}\left[-\frac{e^{-2\tau}}{2}\right]_0^t = -e^{2t} - \frac{1}{8}e^{2t}\left(e^{-2t} - 1\right) =$$

$$= -e^{2t} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8}e^{2t} = -\frac{7}{8}e^{2t} - \frac{1}{8}, \quad t \geq 0$$

1.2) Con $k = 1$, determinare tutti gli stati di equilibrio quando l'ingresso $u(t)$ è nullo. Discutere poi le proprietà di stabilità di tali stati di equilibrio.

$$0 = 2x - x^3 = x(2 - x^2)$$

- CI SONO 3 STATI DI EQUILIBRIO: $\begin{cases} \bar{x}_A = 0 \\ \bar{x}_B = \sqrt{2} \\ \bar{x}_C = -\sqrt{2} \end{cases}$

$$f_x = 2 - 3x^2$$

$f_x(\bar{x}_A) = 2 > 0 \Rightarrow \bar{x}_A$ INSTABILE

$f_x(\bar{x}_B) = -4 < 0 \Rightarrow \bar{x}_B$ AS. STABILE

$f_x(\bar{x}_C) = -4 < 0 \Rightarrow \bar{x}_C$ AS. STABILE

1.3) Sempre con $k = 1$, verificare che la retroazione $u(t) = 4y(t)(y^2(t) - 5)$ consente di stabilizzare il sistema. Valutare inoltre in questo caso il tempo di assestamento del sistema retroazionato.

$$\dot{x}(t) = 2x(t) - x^3(t) + \frac{1}{4}\left(4x^3(t) - 20x(t)\right) =$$

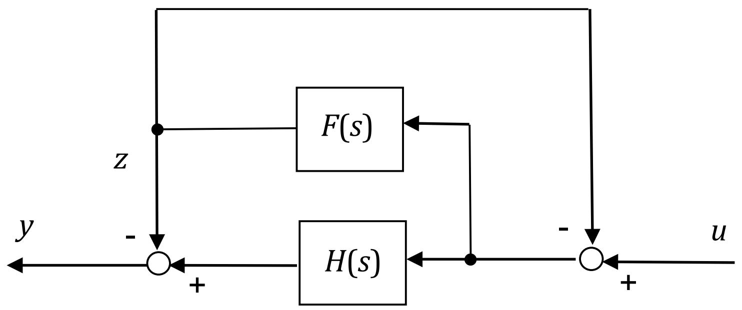
$$= -3x(t)$$

- IL SISTEMA RETROAZIONATO È LINEARE CON AUTOVALORE $\lambda = -3 \Rightarrow$ SISTEMA AS. STABILE

- TEMPO DI ASSESTAMENTO: $t_a \simeq \frac{5}{|\lambda|} = \frac{5}{3} \simeq 1.67$

ESERCIZIO 2

Si consideri il sistema descritto dal seguente schema a blocchi.



2.1) Scrivere le relazioni che legano tra loro le trasformate $U(s)$, $Z(s)$ e $Y(s)$. Ricavare poi la funzione di trasferimento $G(s)$ tra l'ingresso u e l'uscita y.

$$Y(s) = -Z(s) + H(s)\left(U(s) - Z(s)\right)$$

$$Z(s) = F(s)\left(U(s) - Z(s)\right) \Longrightarrow Z(s) = \frac{F(s)}{1+F(s)}U(s)$$

$$Y(s) = \underbrace{\frac{H(s)-F(s)}{1+F(s)}}_{G(s)}U(s)$$

2.2) Si ponga ora $F(s) = \frac{2}{s+1}$, $H(s) = \frac{1}{s+2}$. Calcolare l'andamento di $y(t), t \geq 0$ in risposta all'ingresso $u(t) = A\,\mathrm{sca}(t)$.

$$G(s) = -\frac{1}{s+2} \qquad U(s) = \frac{A}{s}$$

HEAVISIDE

$$Y(s) = -\frac{A}{s(s+2)} = -\frac{A}{2}\frac{1}{s} + \frac{A}{2}\frac{1}{s+2}$$

$$y(t) = -\frac{A}{2}\left(1 - e^{-2t}\right), \; t \geq 0$$

2.3) Determinare i valori di equilibrio delle variabili z e y quando l'ingresso u è costante e pari a $\bar{u}$.

$$\bar{z} = \frac{\mu_F}{1+\mu_F}\bar{u} = \frac{2}{3}\bar{u}$$

$$\bar{y} = \frac{\mu_H - \mu_F}{1+\mu_F}\bar{u} = -\frac{1}{2}\bar{u}$$

ESERCIZIO 3

Si consideri il sistema a tempo discreto descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k \\ y_k &= Cx_k \end{aligned} \qquad A = \begin{bmatrix} 2\alpha & -0.15 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

dove α è un parametro reale

3.1) Determinare per quale valore di α il sistema ammette un equilibrio con $\bar{y} = 3\bar{u}$.

$$\begin{cases} x_1 = 2\alpha x_1 - 0.15 x_2 \\ x_2 = 0.5 x_2 + \bar{u} \\ y = x_1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{aligned} \bar{x}_2 &= 2\bar{u} \\ \bar{x}_1 &= -\frac{0.3}{1-2\alpha}\bar{u} = 3\bar{u} \end{aligned}$$

$$\alpha = \frac{11}{20} = 0.55$$

3.2) In corrispondenza del valore di α trovato in precedenza, giudicare la stabilità dell'equilibrio. Specificare anche la condizione su α necessaria e sufficiente per l'asintotica stabilità del sistema.

- LA MATRICE A È TRIANGOLARE.
- QUINDI GLI AUTOVALORI SONO $\lambda_1 = 2\alpha$, $\lambda_2 = 0.5$
- QUANDO $\alpha = 0.55 \longrightarrow \lambda_1 = 1.1$, $|\lambda_1| > 1 \Longrightarrow$ INSTABILITÀ
- IN GENERALE: AS. STABILITÀ $\Longleftrightarrow |2\alpha| < 1$ OVVERO $-\frac{1}{2} < \alpha < \frac{1}{2}$

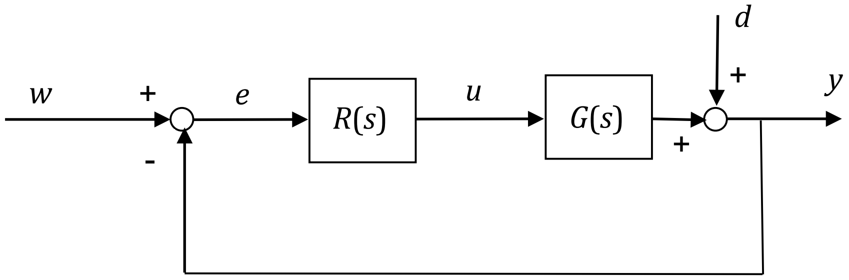
3.3) Ponendo $\alpha = 0$, calcolare i primi valori y_k , $0 \leq k \leq 3$, della risposta del sistema a un impulso unitario a partire da $x_0 = 0$. Mostrare inoltre che tale risposta non può assumere valori positivi in alcun istante $k \geq 0$.

$$\begin{aligned} y_0 &= Cx_0 = 0 \\ y_1 &= CB = 0 \\ y_2 &= CAB = -0.15 \\ y_3 &= CA^2B = -0.075 \end{aligned}$$

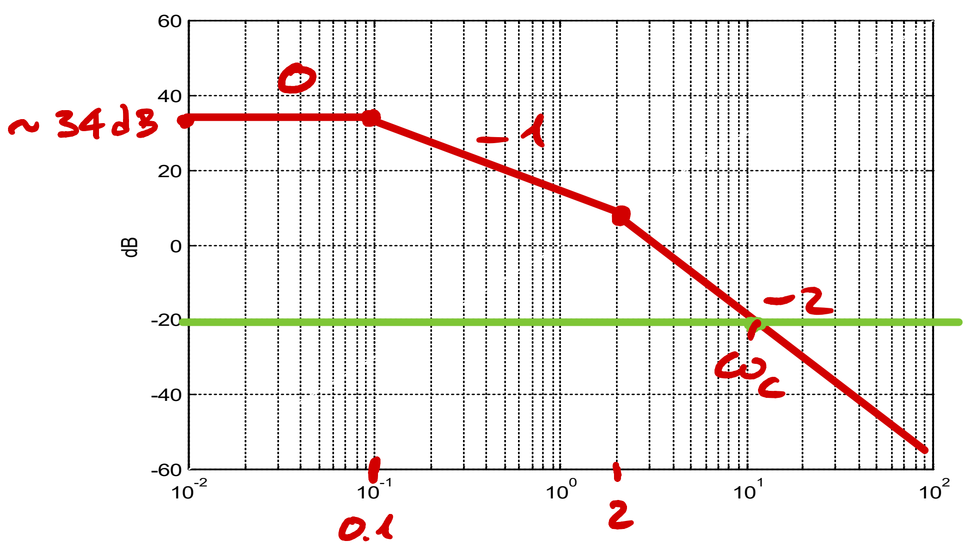
- PER $k \geq 2$ SI VEDE CHE $y_k = -0.15(0.5)^{k-2} < 0$

ESERCIZIO 4

Si consideri il sistema di controllo mostrato in figura, dove la funzione di trasferimento del sistema da controllare è $G(s) = \frac{50}{(1+s/2)(1+10s)}$.



4.1) Tracciare il diagramma (asintotico) di Bode del modulo associato a $G(s)$.



4.2) In corrispondenza dei due diversi regolatori $R_1(s) = 10$ e $R_2(s) = 10e^{-0.1s}$, valutare la pulsazione critica e il margine di fase del sistema di controllo. Sulla base di tali valori, discutere la stabilità del sistema nei due casi.

- CASO $R_1(s)$

• OCCORRE TRASLARE IL GRAFICO DI +20dB OPPURE ABBASSARE L'ASSE DEI DECIBEL DI -20dB (VEDI FIGURA)

$\omega_c \simeq 10$, $\varphi_{m1} = 180° - \arctg(100) - \arctg(5) \simeq 12°$

$\left.\begin{array}{l}\mu = 500 > 0 \\ \varphi_{m1} = 12° > 0°\end{array}\right\} \xRightarrow{\text{CRIT. BODE ✓}}$ AS. STABILITÀ

- CASO $R_2(s)$

ω_c RIMANE INVARIATA

$\varphi_{m2} = \varphi_{m1} - 0.1\,\omega_c \frac{180°}{\pi} \simeq 12° - 57° = -45° < 0$

CRIT. BODE ✓ ⟹ INSTABILITÀ

4.3) Supponendo di usare il regolatore $R_1(s) = 10$, calcolare il valore a transitorio esaurito dell'errore $e(\infty)$ quando $w(t) = 0$ e $d(t) = 5\,\mathrm{sca}(t-10)$. Inoltre, con riferimento a tali ingressi, determinare in modo approssimato a quale istante $\bar{t}$ si può ritenere che risulti, agli effetti pratici, $e(t) \cong e(\infty)$, $\forall t \geq \bar{t}$.

$$G_{ed}(s) = -\frac{1}{1+L(s)} \qquad L(s) = \frac{500}{(1+s/2)(1+10s)}$$

- TIPO DI $L(s)$: $g=0$

$$e(\infty) = \lim_{s\to 0} s\left(-\frac{1}{1+L(s)}\right)\frac{5}{s}e^{-10s} = -\frac{5}{1+\mu} = -\frac{5}{501} \simeq -0.01$$

- L'ISTANTE $\bar{t}$ IN CUI IL TRANSITORIO È PRATICAMENTE ESAURITO È

$$\bar{t} = \underbrace{t_a}_{\text{TEMPO DI ASSESTAMENTO DEL SISTEMA IN ANELLO CHIUSO}} + \underbrace{10}_{\text{RITARDO DEL DISTURBO}}$$

- POLI DOMINANTI IN A. CHIUSO: $\omega_n \simeq \omega_c \simeq 10$

$$\xi \simeq \frac{\varphi_m}{100} \simeq 0.12$$

$$\Rightarrow t_a \simeq \frac{5}{\xi\omega_n} \simeq \frac{5}{1.2} \simeq 4.2$$

- QUINDI, IN CONCLUSIONE:

$$\bar{t} \simeq 14.2$$