ESERCIZIO 1

Si prendano in considerazione i due seguenti sistemi dinamici:

sistema 1: $\begin{array}{l}\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t)\end{array}$ $\quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 \\ -0.3 & -0.4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix}$

sistema 2: $Y(s) = G(s)U(s) \quad G(s) = \frac{2}{s+0.25}$

1.1) Verificare l'asintotica stabilità di entrambi i sistemi.

1.2) Giudicare quale dei due sistemi presenta la risposta allo scalino che si assesta più velocemente.

1.3) Con $\bar{u} > 0$, giudicare quale dei due sistemi possiede il valore maggiore dell'uscita di equilibrio $\bar{y}$.

1.4) Per entrambi i sistemi, scrivere i comandi Matlab che permettono di disegnare la risposta allo scalino.

ESERCIZIO 2

Si consideri il sistema dinamico nonlineare di ordine 1 descritto da:

$$\dot{x}(t) = (x(t) - 2)(x(t) - u(t)) + u(t) - 3$$
$$y(t) = x(t)$$

2.1) Verificare che, per $\bar{u} = 2$, il sistema ammette due distinti stati di equilibrio.

2.2) Verificare che uno solo dei due stati di equilibrio prima determinati è asintoticamente stabile.

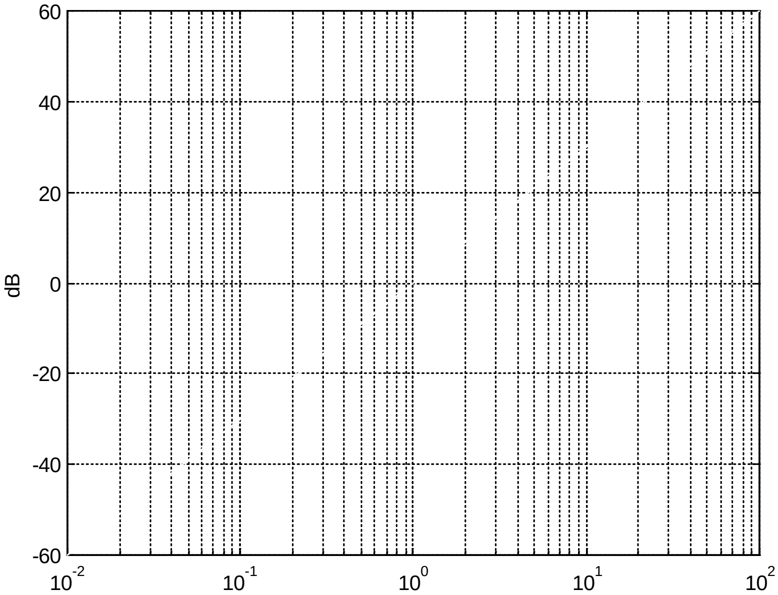
2.3) Ricavare il modello linearizzato nell'intorno dello stato di equilibrio asintoticamente stabile.

2.4) Utilizzando il modello linearizzato ottenuto nel punto precedente, calcolare approssimativamente il movimento di $x(t)$ a partire da $x(0) = 0$ e con $u(t) = \bar{u} = 2$. Mostrare infine che questa approssimazione non rappresenta il movimento esatto del sistema nonlineare.

ESERCIZIO 3

Si consideri il sistema con ingresso $u(t)$, uscita $y(t)$ e funzione di trasferimento $G(s) = \frac{45(1+0.5s)}{(1+5s)(1+0.1s)}$.

3.1) Tracciare il corrispondente diagramma di Bode asintotico del modulo.



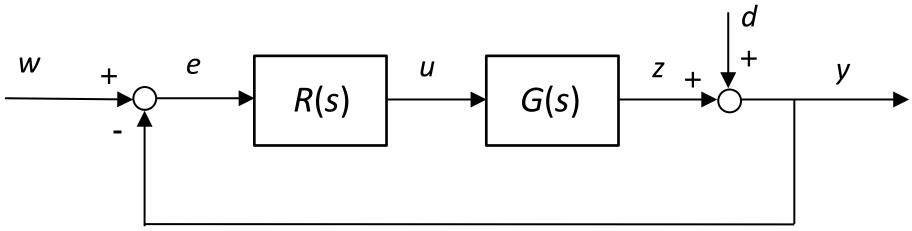
3.2) A partire dal diagramma, valutare la pulsazione $\bar{\omega}$ per cui l'ingresso $u(t) = \text{sen}(\bar{\omega}t)$ viene amplificato di un fattore uguale a 10. Verificare poi il risultato per via analitica.

3.3) Dire se il diagramma di Nyquist di $G(s)$ ha dei punti di contatto con l'asse immaginario.

3.4) Determinare almeno due funzioni di trasferimento razionali $G_1(s)$ e $G_2(s)$, diverse da $G(s)$ e asintoticamente stabili, che hanno lo stesso diagramma del modulo di $G(s)$.

ESERCIZIO 4

Si consideri il sistema di controllo mostrato in figura, dove $G(s) = \frac{5}{s} e^{-s\tau}$, $R(s) = \mu = 0.1$.



4.1) Scrivere i legami (nel dominio del tempo) tra tutte le variabili presenti nello schema.

4.2) Giudicare l'asintotica stabilità del sistema di controllo nei due casi: (a) $\tau = 0$; (b) $\tau = 1$.

4.3) In entrambi i casi (a) e (b) valutare l'errore a regime quando $d(t) = \text{sen}(0.02t)$.

4.4) In entrambi i casi (a) e (b) valutare l'errore a regime quando $d(t) = 12\text{sca}(t)$.

SOLUZIONE DELL'ESERCIZIO 1

1.1) Il polinomio caratteristico della matrice A del sistema 1 è:

$$\varphi(\lambda) = \det\left(\lambda I - A\right) = \lambda^2 + 0.4\lambda + 0.03 = \left(\lambda + 0.1\right)\left(\lambda + 0.3\right)$$

Gli autovalori sono quindi entrambi reali e negativi, per cui il sistema è asintoticamente stabile.

L'asintotica stabilità del sistema 2 discende dall'osservazione che l'unico polo di $G(s)$ è negativo.

1.2) Il polo dominante del sistema 1 è $\lambda = -0.1$ e la sua costante di tempo è $\tau = 10$. Pertanto, il tempo di assestamento del sistema 1 è circa $t_a = 5\tau = 50$.

Poiché il tempo di assestamento del sistema 2 è $t_a \cong 20$, il sistema 2 ha una risposta allo scalino che si assesta più velocemente.

1.3) Occorre confrontare i rispettivi guadagni statici, poiché $\overline{y} = \mu_s \overline{u}$. La funzione di trasferimento del sistema 1 è $G(s) = C(sI - A)^{-1} B = \dfrac{0.3}{s^2 + 0.4s + 0.03}$ e ha guadagno statico $G(0) = 10$. Il sistema 2 ha guadagno statico $G(0) = 8$. Quindi il sistema 1 presenta un valore maggiore dell'uscita di equilibrio.

1.4)

Sistema 1

```
>> A=[0  0.1 ; -0.3  -0.4]; B=[1 ; 0]; C=[0  -1]; D=0;
>> sist1=ss(A,B,C,D);
>> step(sist1);
```

Sistema 2

```
>> num=2; den=[1  0.25];
>> sist2=tf(num,den);
>> step(sist2);
```

SOLUZIONE DELL'ESERCIZIO 2

2.1) Imponendo la condizione di equilibrio:

$$0 = (x-2)^2 - 1$$

si trovano i due stati di equilibrio $\bar{x}_A = 1$ e $\bar{x}_B = 3$.

2.2) Linearizzando l'equazione di stato si ottiene:

$$f_x(x, \bar{u}) = 2x - \bar{u} - 2 = 2x - 4$$

Quindi $f_x(\bar{x}_A, \bar{u}) = -2 < 0$ e lo stato di equilibrio $\bar{x}_A$ è asintoticamente stabile.

Invece, $f_x(\bar{x}_B, \bar{u}) = 2 > 0$ e lo stato di equilibrio $\bar{x}_B$ è instabile.

2.3) Poiché $f_u(\bar{x}_A, \bar{u}) = 3 - \bar{x}_A = 2$, il modello linearizzato nell'intorno di $\bar{x}_A$ è dato da:

$$\delta\dot{x}(t) = -2\delta x(t) + 2\delta u(t)$$
$$\delta y(t) = \delta x(t)$$

2.4) Risulta $\delta x(0) = x(0) - \bar{x}_A = -1$, $\delta u(t) = u(t) - \bar{u} = 0$. Quindi il movimento del sistema linearizzato è composto solo dal movimento libero $\delta x(t) = e^{-2t}\delta x(0) = -e^{-2t}$. Il movimento approssimato dello stato è allora $x(t) \cong \bar{x}_A + \delta x(t) = 1 - e^{-2t}$, per $t \geq 0$.

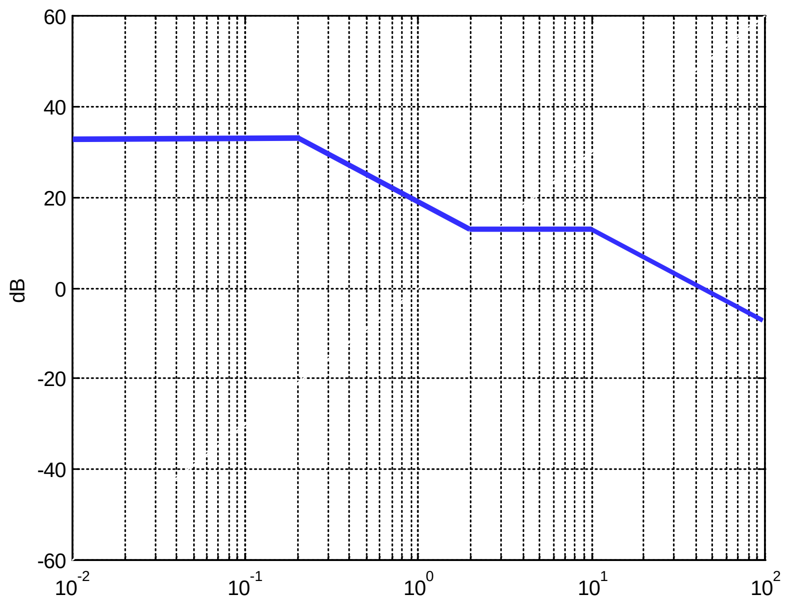
Tale approssimazione non rappresenta il movimento esatto del sistema nonlineare perché, sostituendo $x(t)$ nell'equazione di stato, si ottiene al secondo membro:

$$f(x(t), \bar{u}) = (-1 - e^{-2t})^2 - 1 = e^{-4t} + 2e^{-2t}$$

che non coincide con il primo membro $\dot{x}(t) = 2e^{-2t}$.

SOLUZIONE DELL'ESERCIZIO 3

3.1)



3.2) Dal diagramma si osserva che l'intersezione con la retta di ordinata 20 dB avviene circa in $\omega = 0.9$. Come verifica, si può calcolare:

$$|G(j0.9| = \frac{45|1+j0.45|}{|1+j4.5|\cdot|1+j0.09|} \cong 10.66$$

che approssimativamente coincide con il valore di amplificazione 10 richiesto.

3.3) Il diagramma della fase asintotico mostra che la fase rimane confinata tra 0° e -90°. Quindi il diagramma di Nyquist si svolge completamente nel semipiano destro, toccando l'asse immaginario nell'origine solo per $\omega \to \infty$.

3.4) Possibili funzioni di trasferimento (razionali e asintoticamente stabili) che hanno lo stesso diagramma di Bode di $G(s)$ sono:

$$G_1(s) = -G(s) = \frac{-45(1+0.5s)}{(1+5s)(1+0.1s)}$$

$$G_2(s) = \frac{45(1-0.5s)}{(1+5s)(1+0.1s)}$$

$$G_3(s) = G(s)\frac{1-s\tau}{1+s\tau} \quad , \quad \tau > 0$$

SOLUZIONE DELL'ESERCIZIO 4

4.1) Dallo schema a blocchi si ricava:

$$e(t) = w(t) - y(t)$$
$$y(t) = z(t) + d(t)$$
$$\dot{z}(t) = 5u(t-\tau)$$
$$u(t) = 0.1e(t)$$

4.2) Con $\tau = 0$, la funzione di trasferimento d'anello è $L(s) = \frac{0.5}{s}$. Il criterio di Bode è applicabile e indica che il sistema di controllo è asintoticamente stabile. Infatti risulta $\omega_c = 0.5, \varphi_m = 90° > 0, \mu = 0.5 > 0$.

Con $\tau = 1$, la funzione di trasferimento d'anello diventa $L(s) = \frac{0.5e^{-s}}{s}$. Il criterio di Bode è ancora applicabile e anche in questo caso indica che il sistema di controllo è asintoticamente stabile. Infatti risulta $\omega_c = 0.5, \varphi_m = 90° - 0.5\frac{180°}{\pi} \cong 61° > 0, \mu = 0.5 > 0$.

4.3) Bisognerebbe considerare la funzione di trasferimento $G_{ed}(s) = -S(s) = \frac{-1}{1+L(s)}$, ma poiché il segno è irrilevante si può fare riferimento alla funzione $S(s) = \frac{1}{1+L(s)}$. Essa si comporta da filtro passa-alto, attenuando le componenti del disturbo a pulsazioni inferiori a $\omega_c = 0.5$. Il disturbo viene quindi attenuato, con un fattore di attenuazione pari a $\frac{1}{|L(j0.02)|} = \frac{0.02}{0.5} = 0.04$.

Poiché il ritardo non altera il diagramma del modulo, questa valutazione è corretta sia quando $\tau = 0$, sia quando $\tau = 1$.

4.4) La presenza di un polo nell'origine nella funzione d'anello fa sì che l'effetto a regime di un disturbo a scalino (di qualunque ampiezza) sia nullo. Anche in questo caso ciò vale sia senza il ritardo, sia in presenza del ritardo, a patto che questo non porti all'instabilità.
Il risultato si dimostra mediante l'applicazione del teorema del valore finale.