ESERCIZIO 1

La risposta allo scalino di un sistema dinamico a tempo continuo sia data da $y(t) = (4 + 3\mathrm{e}^{-2t})\mathrm{sca}(t)$.

1.1) Disegnare il grafico di $y(t)$ e valutarne il tempo di assestamento. Verificare poi la correttezza di tale valutazione utilizzando la formula data nel testo. Dire inoltre sulla base del grafico se il sistema può essere strettamente proprio.

1.2) Determinare la funzione di trasferimento $G(s)$ del sistema.

1.3) A partire da $G(s)$, ricavare una rappresentazione di stato del sistema.

1.4) Scrivere le istruzioni Matlab che definiscono il sistema.

ESERCIZIO 2

Si consideri il sistema dinamico descritto dalle seguenti equazioni:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) + e^{-x_1(t)}$$
$$\dot{x}_2(t) = -(x_1(t) + 1) - u(t)$$
$$y(t) = x_1(t)$$

2.1) Calcolare stato e uscita di equilibrio in corrispondenza dell'ingresso $\bar{u} = 1$.

2.2) Giudicare la stabilità dello stato di equilibrio individuato.

2.3) Con riferimento al sistema linearizzato nell'intorno del precedente stato di equilibrio, scrivere la formula del movimento libero dell'uscita di tale sistema. Spiegare anche cosa esso rappresenta.

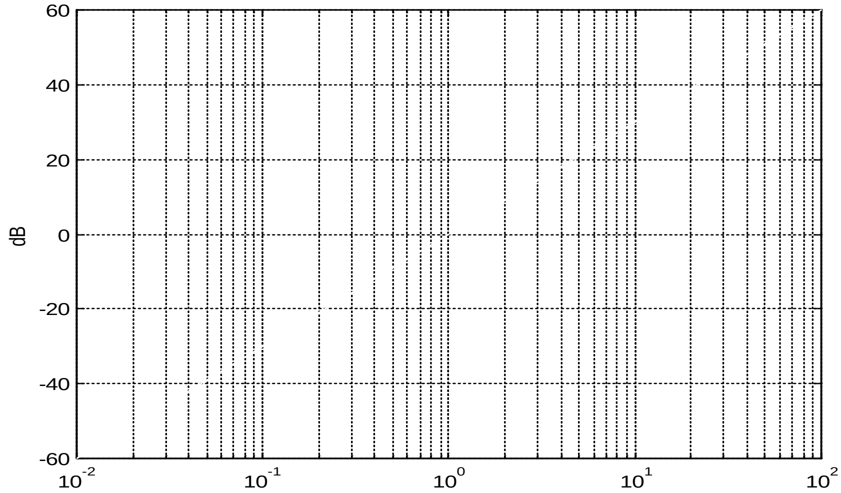
ESERCIZIO 3

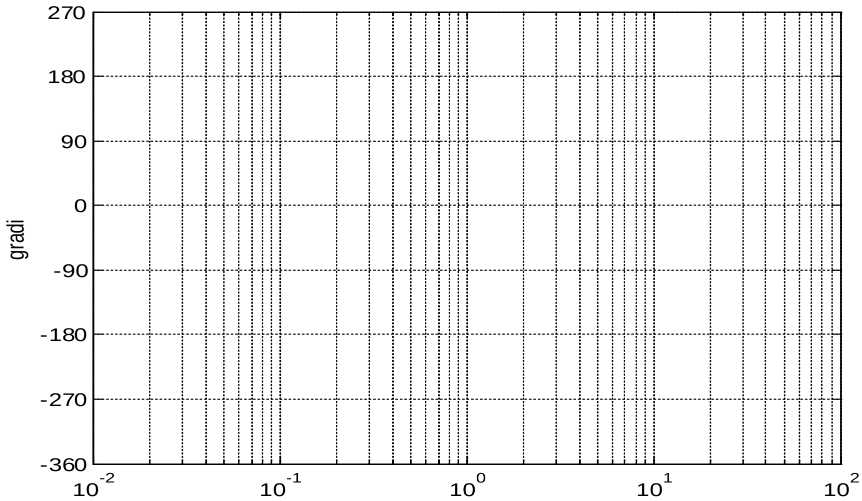
Si consideri un sistema, con ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$, descritto dalla funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{-3(1+s)}{(1+0.1s)^2}$$

3.1) Calcolare poli, zeri, guadagno e tipo di $G(s)$.

3.2) Tracciare i diagrammi asintotici di Bode associati a G(s), insieme a una stima qualitativa del loro andamento effettivo.



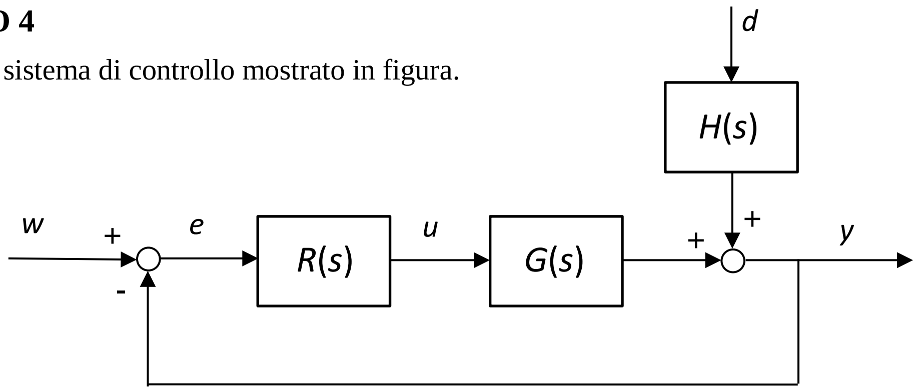


3.3) Supponendo che l'ingresso sia sinusoidale e di ampiezza unitaria, valutare (approssimativamente) per quale pulsazione esso produce la maggior ampiezza dell'uscita. Determinare anche il valore di tale ampiezza.

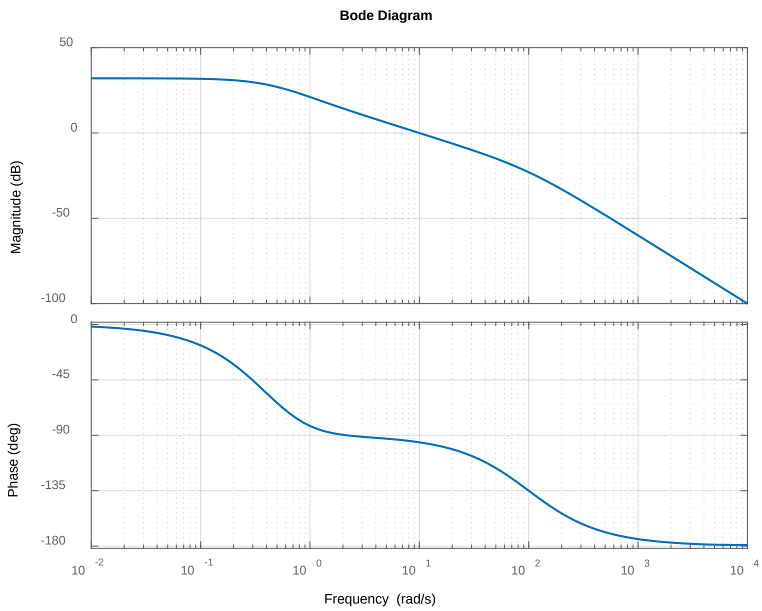
3.4) Tracciare l'andamento qualitativo nel piano complesso del diagramma polare associato a $G(s)$.

ESERCIZIO 4

Si consideri il sistema di controllo mostrato in figura.



La funzione di trasferimento che descrive l'effetto (in anello aperto) del disturbo è $H(s) = \frac{100}{s+100}$, mentre la funzione d'anello $L(s) = R(s)G(s)$ è asintoticamente stabile, ha guadagno positivo e i suoi diagrammi di Bode sono quelli qui sotto riportati.



4.1) Utilizzando il criterio di Bode, dopo aver verificato la sua applicabilità, discutere l'asintotica stabilità del sistema di controllo.

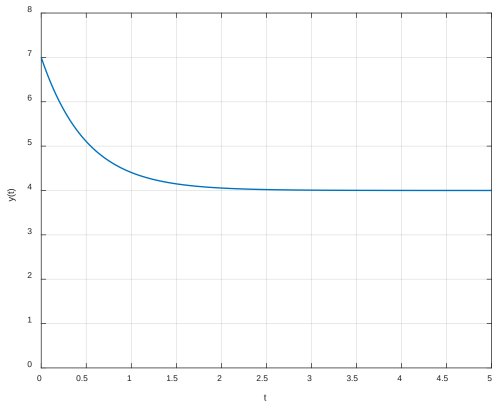
4.2) Spiegare perché l'asintotica stabilità è una proprietà fondamentale per qualunque sistema di controllo.

4.3) Determinare approssimativamente la posizione dei poli dominanti (o del polo dominante) del sistema in anello chiuso.

4.4) Valutare l'efficacia del sistema di controllo nel ridurre l'effetto del disturbo $d(t)$ alle varie pulsazioni.

SOLUZIONE DELL'ESERCIZIO 1

1.1) Il grafico di $y(t)$ è riportato in figura.



Il tempo di assestamento dipende dalla velocità con cui tende a zero l'esponenziale. Poiché l'associata costante di tempo vale $\tau = 0.5$, il tempo di assestamento può essere approssimato come $t_a \cong 5\tau = 2.5$.
In effetti, valutando $y(t)$ in corrispondenza di t_a , si ottiene $y(t_a) = 4 + 3e^{-5} \cong 4.02$, che è un valore molto vicino a quello asintotico $y(\infty) = 4$.
Il sistema non può essere strettamente proprio perché la risposta allo scalino presenta un valore iniziale diverso da zero, ovvero esiste un legame istantaneo tra l'ingresso e l'uscita.

1.2) Trasformando con Laplace $y(t)$ si ricava $Y(s) = \frac{4}{s} + \frac{3}{s+2} = \frac{7s+8}{s(s+2)}$. Quindi, ricordando che la trasformata di Laplace dell'ingresso a scalino è $U(s) = \frac{1}{s}$, la funzione di trasferimento è $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{7s+8}{s+2}$.

1.3) Poiché $G(s) = \frac{7s+8}{s+2} = 7 - \frac{6}{s+2}$, una possibile rappresentazione di stato è data da:

$$\dot{x}(t) = -2x(t) - 6u(t)$$
$$y(t) = x(t) + 7u(t)$$

1.4) Un'istruzione Matlab che definisce il sistema nello spazio di stato è:

» sist = ss(-2,-6,1,7);

Un'altra istruzione equivalente che definisce il sistema tramite la sua funzione di trasferimento è:

» sist = tf([7 8],[1 2]);

SOLUZIONE DELL'ESERCIZIO 2

2.1) Ponendo a zero le derivate e assumendo $\bar{u} = 1$, in condizioni di equilibrio si ha:

$$
\begin{aligned}
0 &= x_2 + e^{-x_1} \\
0 &= -(x_1 + 1) - 1 \\
y &= x_1
\end{aligned}
$$

da cui lo stato di equilibrio è definito da $\bar{x}_1 = -2$, $\bar{x}_2 = -e^2$ e l'uscita di equilibrio è $\bar{y} = -2$.

2.2) Per giudicare la stabilità dello stato di equilibrio individuato conviene calcolare la matrice dinamica del sistema linearizzato:

$$f_x(\bar{x}, \bar{u}) = \begin{bmatrix} -e^{-\bar{x}_1} & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e^2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Il suo polinomio caratteristico è $\varphi(\lambda) = \lambda^2 + e^2\lambda + 1$, che ha entrambe le radici a parte reale negativa (per il criterio di Cartesio). Quindi, lo stato di equilibrio in esame è asintoticamente stabile.

2.3) Poiché risulta $g_x(\bar{x}, \bar{u}) = [1 \quad 0]$, la formula del movimento libero dell'uscita del sistema linearizzato è:

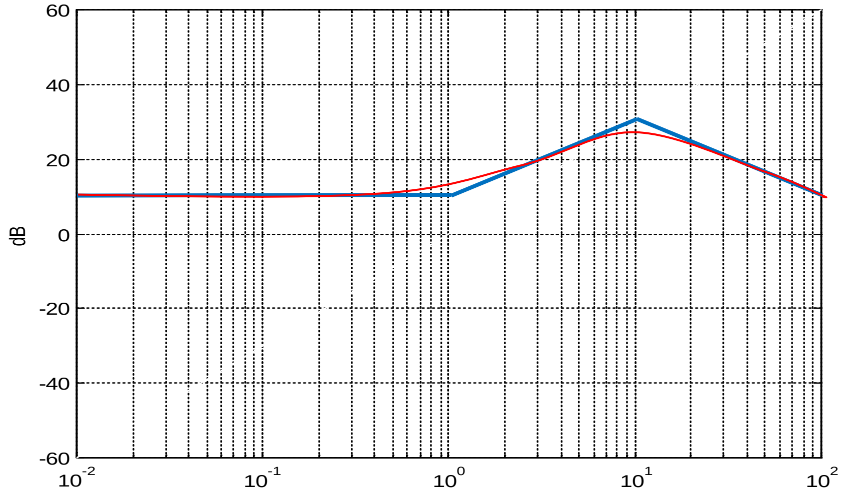
$$\delta y(t) = [1 \quad 0] e^{f_x(\bar{x}, \bar{u})t} \begin{bmatrix} \delta x_1(0) \\ \delta x_2(0) \end{bmatrix}, \quad t \geq 0$$

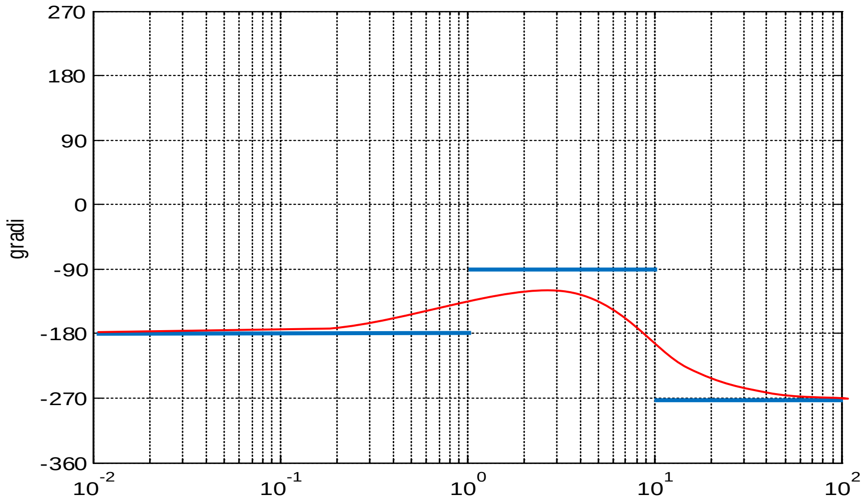
Tale formula consente di ricavare in modo approssimato lo scostamento dall'equilibrio dell'uscita $\delta y(t) = y(t) - \bar{y}$, per $t \geq 0$ in funzione delle perturbazioni $\delta x_1(0) = x_1(0) - \bar{x}_1$, $\delta x_2(0) = x_2(0) - \bar{x}_2$ dello stato iniziale dai rispettivi valori di equilibrio.

SOLUZIONE DELL'ESERCIZIO 3

3.1) La funzione di trasferimento $G(s)$ ha due poli coincidenti in $s = -10$ e uno zero in $s = -1$. Il tipo è $g = 0$ e il guadagno è $\mu = G(0) = -3$.

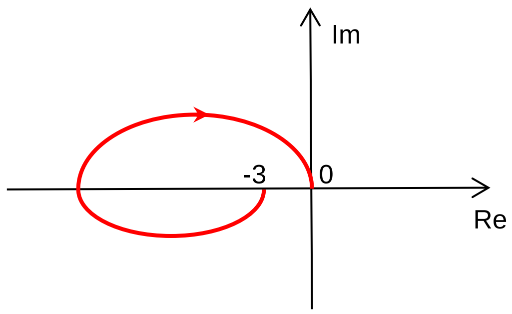
3.2) I diagrammi asintotici di Bode associati a $G(s)$ sono riportati in blu in figura, assieme a una stima dei diagrammi effettivi (in rosso).





3.3) Dal diagramma del modulo si deduce che la massima amplificazione si ha circa in $\omega = 10$, dove risulta $|G(j10)| = \frac{3|1+j10|}{|1+j|^2} = \frac{3\sqrt{101}}{2} \cong 15$. Tale valore rappresenta quindi la massima ampiezza dell'uscita che si ottiene (a regime) in risposta all'ingresso $u(t) = \text{sen}(10t)$.

3.4) Il diagramma polare associato a $G(s)$ ha la forma approssimata indicata in figura.



SOLUZIONE DELL'ESERCIZIO 4

4.1) Il criterio di Bode è applicabile perché $P = 0$ (infatti dal testo la funzione d'anello è asintoticamente stabile) e la pulsazione critica è univocamente definita, come si nota dal diagramma del modulo. La pulsazione critica vale circa $\omega_c = 10$.
Per giudicare la stabilità del sistema retroazionato si noti che il guadagno d'anello μ è positivo (dal testo) e che il margine di fase è circa $\varphi_m = 85° > 0$. Infatti la fase in corrispondenza della pulsazione critica è di poco inferiore a $-90°$ (circa $-95°$). Quindi, per il criterio di Bode, il sistema retroazionato è asintoticamente stabile. Si noti tra l'altro che anche $H(s)$ è asintoticamente stabile, visto che ha un polo negativo.
Complessivamente il sistema di controllo è quindi asintoticamente stabile.

4.2) L'asintotica stabilità è una proprietà fondamentale per qualunque sistema di controllo perché garantisce che il comportamento asintotico del sistema non dipenda dalle condizioni iniziali (in genere non note). Inoltre assicura che qualunque ingresso limitato (per esempio un disturbo) generi un movimento limitato della variabile controllata (stabilità BIBO).

4.3) Poiché il margine di fase è superiore a $75°$ possiamo concludere che il sistema in anello chiuso possiede un polo dominante reale con costante di tempo pari a $\tau \cong 1/\omega_c = 0.1$, cioè un polo in $s \cong -10$.

4.4) La funzione di trasferimento tra il disturbo e la variabile controllata è $G_{yd}(s) = \frac{H(s)}{1+L(s)} = H(s)S(s)$. Il suo diagramma di Bode del modulo può essere ottenuto sommando quello associato a $H(s)$ e quello (approssimato) della funzione di sensitività $S(s)$ (ottenuto ribaltando quello di $L(s)$ fino alla pulsazione critica e poi seguendo l'asse a 0 dB). In definitiva il diagramma ha la forma indicata in rosso nella figura seguente. Quindi il sistema di controllo è efficace nel ridurre l'effetto del disturbo a basse pulsazioni (per $\omega < \omega_c$), mentre le componenti del disturbo a pulsazione maggiore di $\omega = 100$ sono filtrate da $H(s)$. Le uniche componenti che non vengono ben attenuate sono quindi quelle nell'intervallo [10,100].