ESERCIZIO 1

Si consideri il sistema dinamico a tempo continuo descritto dalle seguenti equazioni:

$$\dot{x}_1(t) = \alpha x_1(t)x_2(t) + u(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = -4x_1(t) - x_2(t)$$
$$y(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

dove α è un parametro reale.

1.1) Ponendo $\alpha = 1$, calcolare tutti gli stati e le uscite di equilibrio associati all'ingresso $\bar{u} = 1$.

1.2) Discutere la stabilità degli stati di equilibrio ricavati al punto precedente.

1.3) Ponendo ora $\alpha = 0$, calcolare il movimento libero dell'uscita quando $x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

1.4) Sempre con $\alpha = 0$, calcolare la funzione di trasferimento tra $u(t)$ e $y(t)$ e valutarne il tipo g.

1.1) $\begin{cases} 0 = x_1 x_2 + 1 \\ 0 = -4x_1 - x_2 \\ y = x_1 + x_2 \end{cases} \Longrightarrow$ $\boxed{\bar{x}_A = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \bar{y}_A = -\frac{3}{2} \qquad \bar{x}_B = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \bar{y}_B = \frac{3}{2}}$

1.2) $f_x(\bar{x}, \bar{u}) = \begin{bmatrix} \bar{x}_2 & \bar{x}_1 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}$

$f_x(\bar{x}_A, \bar{u}) = \begin{bmatrix} -2 & 1/2 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}$ $\quad \varphi(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 4$

$\Downarrow$ CARTESIO

$\Re(\lambda_{1,2}) < 0 \Rightarrow$ $\bar{x}_A$ AS. STAB.

$f_x(\bar{x}_B, \bar{u}) = \begin{bmatrix} 2 & -1/2 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}$ $\quad \varphi(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 4$

$\Downarrow$ CARTESIO

$\exists \lambda_i : \Re(\lambda_i) > 0 \Rightarrow$ $\bar{x}_B$ INSTAB.

1.3) $\begin{cases} \dot{x}_1(t) = 0 \\ \dot{x}_2(t) = -4x_1(t) - x_2(t) \\ y(t) = x_1(t) + x_2(t) \end{cases}$ $x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}$

$$\boxed{y_\ell(t) = Ce^{At}x(0)}$$

- SI PUÒ CALCOLARE COSÌ:

$$\begin{cases} x_{1\ell}(t) = x_1(0) = 0 \\ x_{2\ell}(t) = e^{-t}x_2(0) = e^{-t} \\ \boxed{y_\ell(t)} = 0 + e^{-t} = \boxed{e^{-t}} \end{cases}, \quad t \geq 0$$

OPPURE CON

$e^{At} = Me^{\hat{A}t}M^{-1}$ $\hat{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$

MATRICE AUTOVETTORI DI A

$$\boxed{y_\ell(t)} = CMe^{\hat{A}t}M^{-1}x(0) = \dots = \boxed{e^{-t}}, \quad t \geq 0$$

1.4) $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$ $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}$

$$\boxed{G(s) = \frac{s-3}{s(s+1)}}$$

TIPO $\boxed{g = 1}$

ESERCIZIO 2

Si consideri il sistema con ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$ descritto dalla funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{15(1-s)}{(1+2s)(1+10s)}$$

2.1) Dire, giustificando la risposta, se il sistema può essere scomposto nel parallelo di 2 sottosistemi (strettamente propri) del primo ordine.

2.2) Supponendo di applicare l'ingresso $u(t) = 10\mathrm{sca}(t)$, calcolare il valore iniziale, la pendenza inziale e il valore di regime della risposta $y(t)$. Tracciare inoltre l'andamento qualitativo di tale risposta, valutando in particolare il tempo di assestamento.

2.3) Disegnare su un foglio di carta semilogaritmica il diagramma asintotico di Bode del modulo associato a $G(s)$.

2.4) Supponendo ora di controllare in anello chiuso il sistema descritto da $G(s)$ con un regolatore descritto dall'equazione

$$\dot{u}(t) = k(w(t) - y(t))$$

disegnare il corrispondente schema a blocchi e determinare con il criterio di Routh per quali valori del parametro reale k il sistema di controllo risulta asintoticamente stabile.

2.1) SÌ, È POSSIBILE:

$$G(s) = \underbrace{\frac{-45/8}{1+2s}}_{G_1(s)} + \underbrace{\frac{165/8}{1+10s}}_{G_2(s)}$$

2.2)

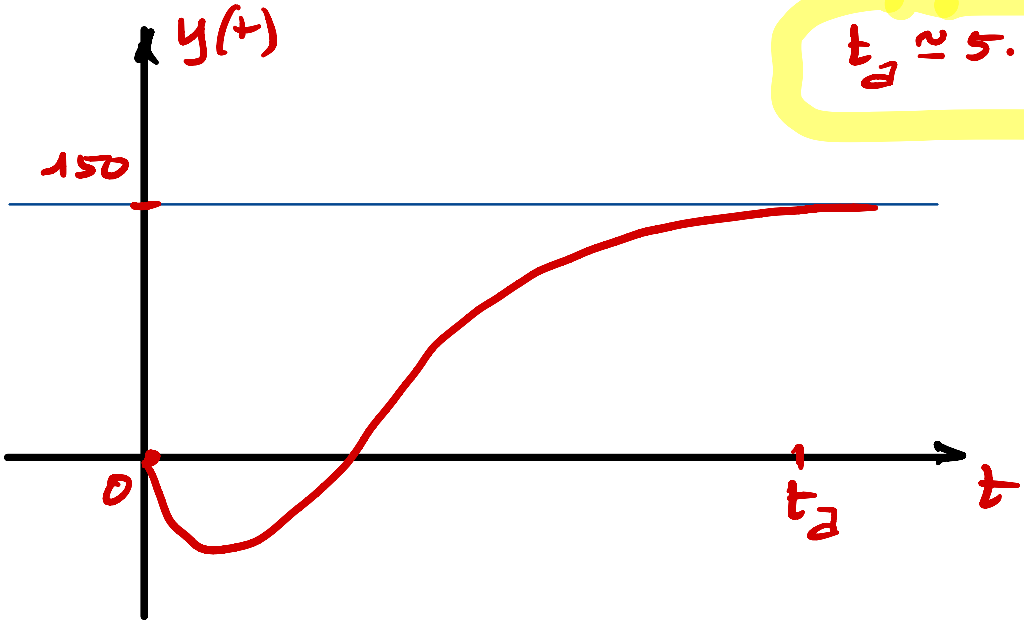
$$Y(s) = G(s)\frac{10}{s} = \frac{150(1-s)}{(1+2s)(1+10s)s}$$

$$y(0) = \lim_{s\to\infty} sY(s) = 0$$

$$\dot{y}(0) = \lim_{s\to\infty} s^2Y(s) = -7.5$$

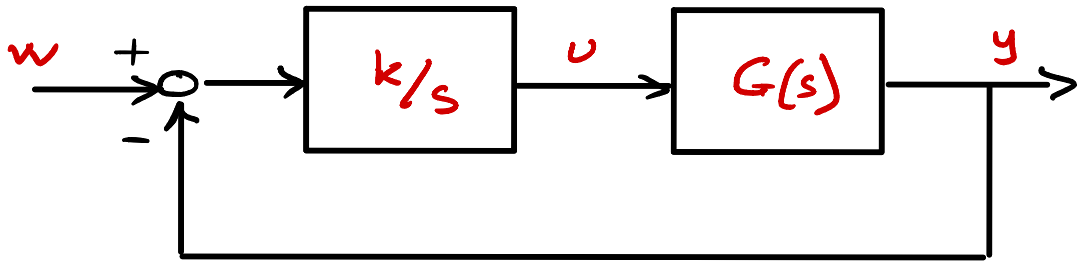
$$y(\infty) = \lim_{s\to 0} sY(s) = 150$$

$$t_a \simeq 5 \cdot \tau_{MAX} = 50$$



2.3) VEDI DIAGRAMMA NELLA PAGINA SEGUENTE

2.4)



$$L(s) = \frac{15k(1-s)}{s(1+2s)(1+10s)} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

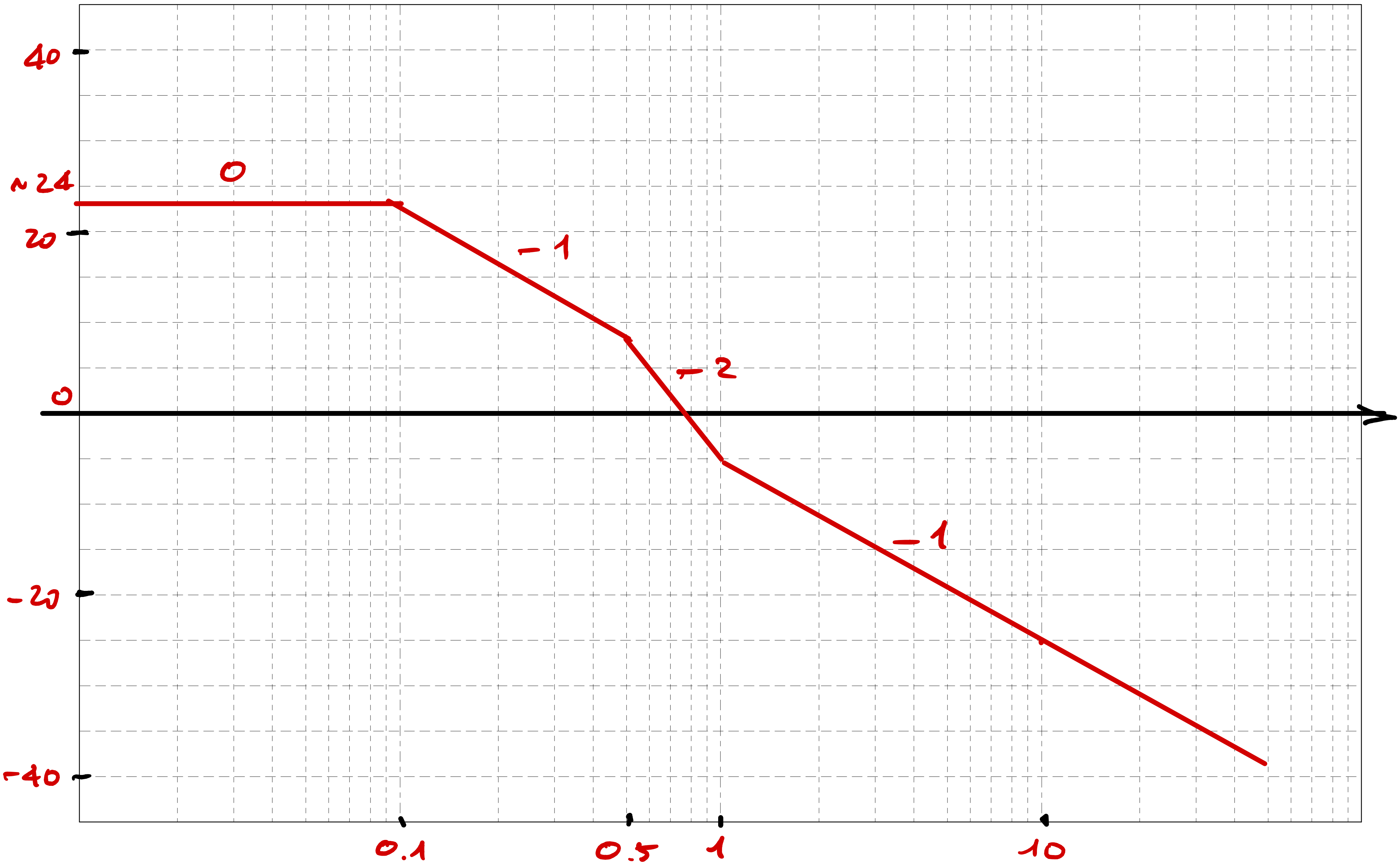
$$\varphi_{AC}(s) = D(s) + N(s) = 20s^3 + 12s^2 + (1-15k)s + 15k$$

- TABELLA DI ROUTH

20	1-15k
12	15k
1-40k	0
15k	

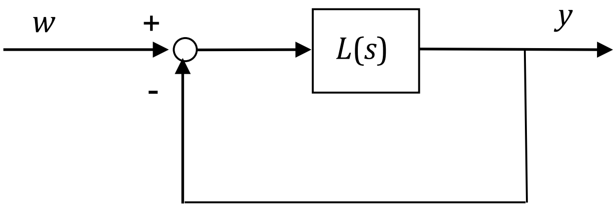
$$\text{AS. STAB.} \Longleftrightarrow \begin{cases} 1-40k > 0 \\ 15k > 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \boxed{0 < k < 1/40}$$

Politecnico di Milano
Dipartimento di Elettronica e Informazione



ESERCIZIO 3

Si consideri il sistema retroazionato mostrato in figura, dove $L(s) = \frac{10}{1+5s}$.



3.1) Verificare l'asintotica stabilità del sistema retroazionato mediante il criterio di Nyquist.

3.2) Calcolare la pulsazione critica, il margine di fase e il margine di guadagno.

3.3) Sulla base del precedente risultato, valutare la posizione del polo dominante in anello chiuso. Confrontare poi questa valutazione con il valore vero.

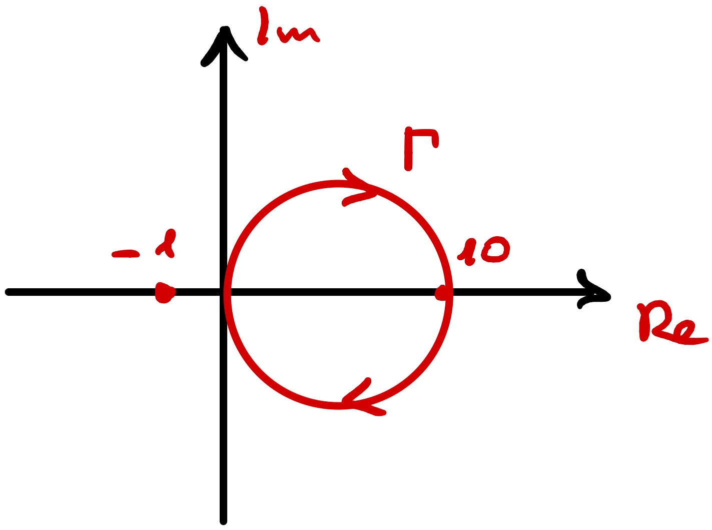
3.4) Spiegare perché la presenza nella funzione d'anello di un eventuale ritardo τ potrebbe far perdere la proprietà di stabilità. Calcolare poi il valore limite di τ per cui il sistema retroazionato rimarrebbe stabile.

3.1) $L(s) = \frac{10}{1+5s}$

$N = 0 = P$

$\Updownarrow$

AS. STAB.



3.2) $|L(j\omega)| = \frac{10}{\sqrt{1+25\omega^2}} = 1 \Longrightarrow \omega_c \simeq 2$

$\varphi_c = -\mathrm{arctg}(5\omega_c) \simeq -\mathrm{arctg}(10) \simeq -84^\circ$

$\varphi_m = 180^\circ - |\varphi_c| \simeq 96^\circ$

$k_m = \infty$ PERCHÈ LA FASE NON SCENDE MAI SOTTO -180°

3.3) - POICHÉ $\varphi_m > 75^\circ$ SI PUÒ RITENERE CHE IL POLO DOMINANTE IN A.C. SIA REALE, CON COSTANTE DI TEMPO $\tau \simeq \frac{1}{\omega_c} \simeq 0.5$, OVVERO AVREMO UN POLO IN $\boxed{s = -2}$.

- IL VALORE VERO DEL POLO SI OTTIENE DA:

$$\varphi_{AC}(s) = D(s) + N(s) = 11 + 5s = 0$$

$$\Longrightarrow \boxed{s = -\frac{11}{5} = -2.2}$$

3.4) IL RITARDO HA UN EFFETTO DESTABILIZZANTE PERCHÈ INTRODUCE UN CONTRIBUTO NEGATIVO ALLA FASE DELLA FDT D'ANELLO, CHE PUÒ PORTARE A $\varphi_m \lesssim 0^\circ$.

$$\boxed{\tau_{MAX}} = \frac{\varphi_m}{\omega_c} \frac{\pi}{180^\circ} \simeq \frac{96}{2} \frac{\pi}{180} \simeq \boxed{0.84}$$