ESERCIZIO 1

Si consideri il sistema dinamico a tempo continuo descritto dalle seguenti equazioni:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \qquad A = \begin{bmatrix} -6 & 4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$y(t) = Cx(t)$$

1.1) Giudicare se il sistema è instabile, semplicemente stabile o asintoticamente stabile.

$$\varphi(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^2 + 9\lambda + 14 = (\lambda+2)(\lambda+7)$$

AUTOVALORI: $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -7$ $\quad Re < 0 \Rightarrow$ AS. STAB.

1.2) Calcolare la funzione di trasferimento tra $u(t)$ e $y(t)$.

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \ldots = \frac{s+1}{(s+2)(s+7)}$$

1.3) Calcolare il movimento forzato dell'uscita $y(t)$ quando $u(t) = \text{sca}(t)$. Dire poi se tale movimento presenta oppure no un valore di picco (senza necessariamente calcolarlo). Valutare anche il tempo necessario perché tale movimento possa considerarsi assestato.

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{s+1}{s(s+2)(s+7)} = \quad \text{HEAVISIDE}$$

$$= \frac{1/14}{s} + \frac{1/10}{s+2} - \frac{6/35}{s+7}$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{1}{14} + \frac{1}{10}e^{-2t} - \frac{6}{35}e^{-7t}, \quad t \geq 0$$

- TALE FUNZIONE PRESENTA UN PICCO A CAUSA DELLO ZERO VICINO ALL'ORIGINE.

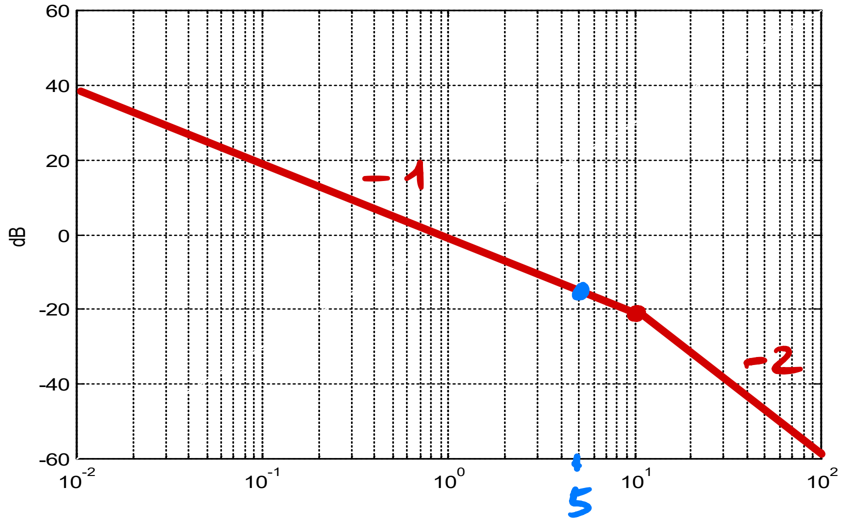
- TEMPO DI ASSESTAMENTO: $t_a \simeq \frac{5}{2} = 2.5$

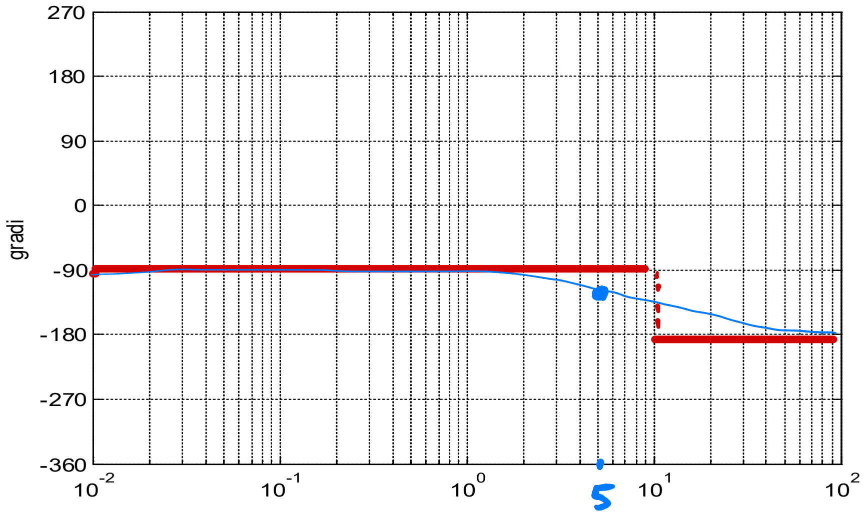
ESERCIZIO 2

Si consideri il sistema descritto dalla funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{10}{s^2+10s}$$

2.1) Disegnare i diagrammi asintotici di Bode del modulo e della fase associati a $G(s)$.





2.2) Calcolare il valore esatto del modulo e dell'argomento di $G(j5)$. Confrontare poi tali valori con quelli ricavabili dai diagrammi asintotici di Bode.

$$G(j5) = \frac{10}{j5(j5+10)}$$

$$|G(j5)| = \frac{10}{5\sqrt{125}} \simeq 0.18$$

DAL DIAGRAMMA

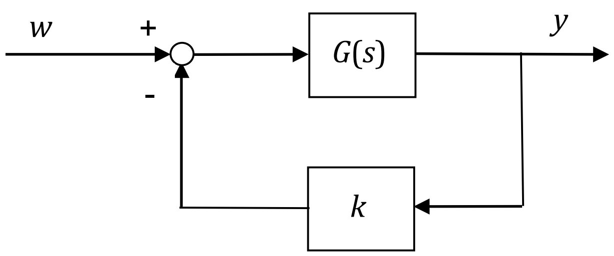
$$|G(j5)|_{dB} \simeq -15\,dB$$

$$\measuredangle G(j5) = -90° - \mathrm{arctg}(0.5) \simeq -117°$$

DAL DIAGRAMMA

$$\measuredangle G(j5) \simeq -120°$$

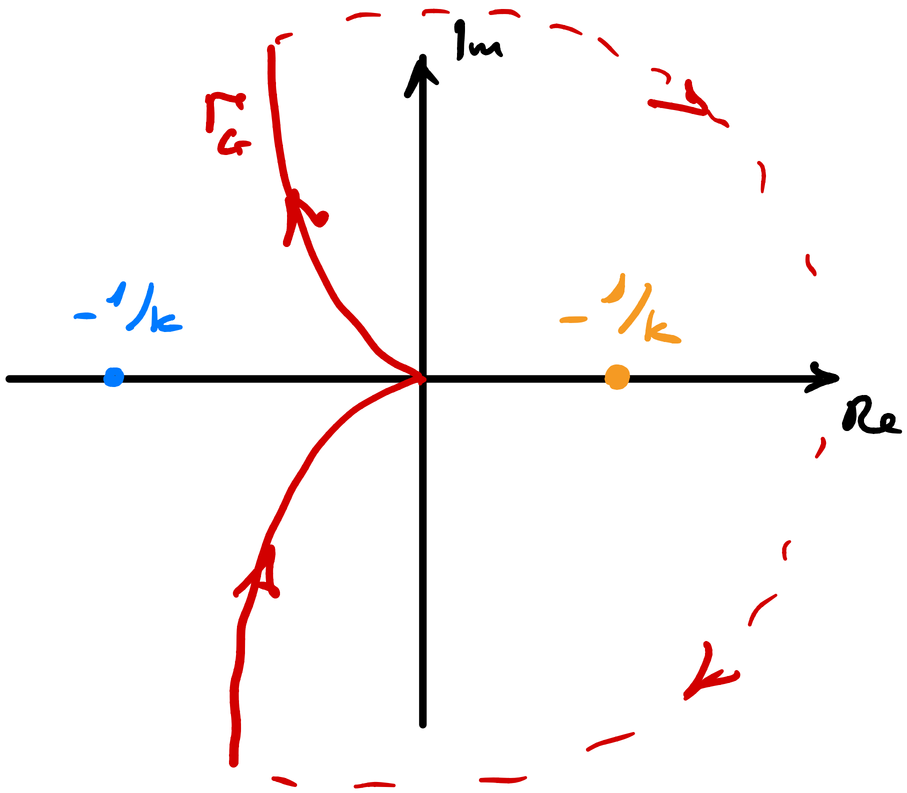
2.3) Si consideri ora il sistema retroazionato mostrato in figura, dove k rappresenta un parametro reale.



Utilizzando il criterio di Nyquist, discutere per quali valori di k (positivi o negativi) il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile.

$$L(s) = k\,G(s) = k\,\frac{10}{s(s+10)} \qquad P = 0$$

- OCCORRE TRACCIARE IL DIAGR. DI NYQUIST DI $G(s)$ E CONTARE IL N° DI GIRI N INTORNO A $-1/k$



$k > 0$ $\quad N = 0 = P \implies$ AS. STABILE

$k < 0$ $\quad N = -1 \neq P \implies$ INSTABILE

$k = 0$ $\quad$ SIST. IN ANELLO APERTO NON AS. STABILE

ESERCIZIO 3

Si consideri il seguente sistema dinamico a tempo discreto di ordine $n = 1$:

$$x_{k+1} = x_k u_k - x_k^2$$
$$y_k = 2x_k$$

3.1) Calcolare tutti i possibili stati di equilibrio associati all'ingresso $\bar{u} = 2$.

$$x = 2x - x^2$$
$$x(x-1) = 0 \quad \begin{cases} \bar{x}_A = 0 \\ \bar{x}_B = 1 \end{cases}$$

3.2) Discutere la stabilità degli stati di equilibrio individuati al punto precedente.

- OCCORRE CALCOLARE LA "MATRICE" $f_x(\bar{x},\bar{u})$ DEL SISTEMA LINEARIZZATO:

$$f_x(\bar{x},\bar{u}) = \bar{u} - 2\bar{x} = 2 - 2\bar{x} = \begin{cases} 2 & \bar{x}_A \quad \text{INST.} \\ 0 & \bar{x}_B \quad \text{AS. STAB.} \end{cases}$$

AS. STABILITÀ $\Longleftrightarrow$ $|f_x(\bar{x},\bar{u})| < 1$

3.3) Calcolare il movimento dell'uscita con ingresso costante $\bar{u} = 2$ e stato iniziale $x_0 = 2$. Commentare questo risultato alla luce delle conclusioni del punto 3.2.

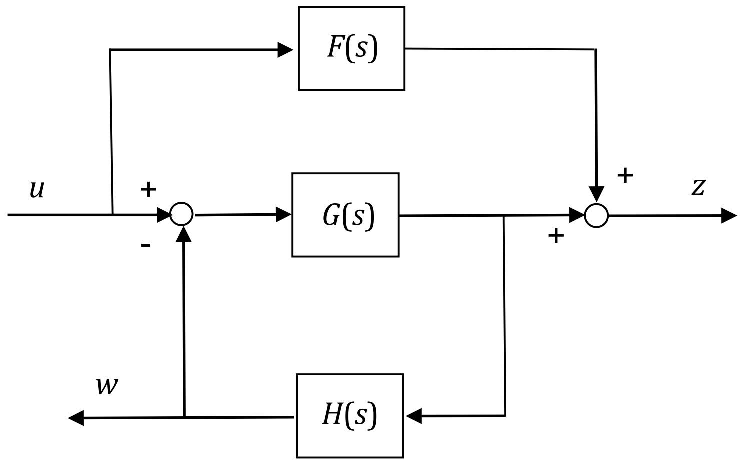
$x_0 = 2$ $\quad y_0 = 4$
$x_1 = 0$ $\quad y_1 = 0$
$x_2 = 0$ $\quad y_2 = 0$
$\vdots \quad\quad \vdots$

- PUR ESSENDO $\bar{x}_A = 0$ INSTABILE, QUESTO MOVIMENTO CONVERGE (IN TEMPO FINITO) VERSO $\bar{x}_A$.
- NON È UNA CONTRADDIZIONE PERCHÉ LA STABILITÀ/INSTAB. È UNA PROPRIETÀ LOCALE.

(SOLO PER VALORI DI x_0 VICINI A $\bar{x}_A$ IL MOVIMENTO SI ALLONTANA DALL'EQUILIBRIO)

ESERCIZIO 4

Si consideri il seguente schema a blocchi:



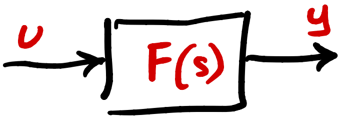
4.1) Calcolare la funzione di trasferimento tra $u(t)$ e $z(t)$.

$$G_{zu}(s) = F(s) + \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$$

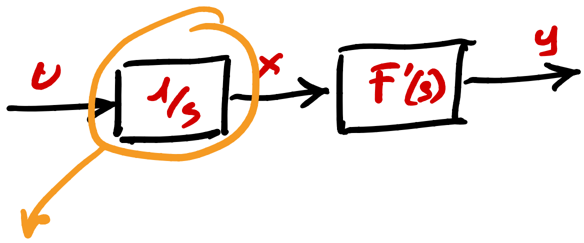
4.2) Calcolare la funzione di trasferimento tra $u(t)$ e $w(t)$.

$$G_{wu}(s) = \frac{G(s)H(s)}{1+G(s)H(s)}$$

4.3) Spiegare perché, se $F(s)$ contenesse un integratore, il sistema non potrebbe stare in equilibrio con $\bar{u}$ costante e diverso da zero.



DIVENTA



$$\dot{x}(t) = u(t)$$

STA IN EQUILIBRIO
SOLO SE $\bar{u} = 0$!