ESERCIZIO 1

Si consideri il sistema dinamico LTI a tempo continuo descritto dalle seguenti equazioni:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \qquad A = \begin{bmatrix} -10 & -4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad C = [0 \quad 1], \quad D = 0$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

1.1) Calcolare la traccia della matrice A. Basandosi solo su di essa, si può affermare qualcosa sulla stabilità del sistema?

1.2) Calcolare tutti gli stati di equilibrio corrispondenti rispettivamente a $\bar{u} = 1$ e $\bar{u} = 0$.

1.3) Ricavare la funzione di trasferimento del sistema e, in base ad essa, calcolare l'andamento nel tempo della risposta all'impulso.

1.1) $tr(A) = -8$

SULLA BASE DELLA SOLA TRACCIA SI PUÒ DIRE CHE LA SOMMA DEGLI AUTOVALORI È $\lambda_1 + \lambda_2 = -8$, MA NULLA SI PUÒ AFFERMARE SULLA STABILITÀ.

1.2) ALL'EQUILIBRIO

$$\begin{cases} 0 = -10x_1 - 4x_2 \\ 0 = 5x_1 + 2x_2 + 2\bar{u} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = -\frac{5}{2}x_1 \\ 0 = 2\bar{u} \end{cases}$$

- CON $\bar{u} = 1$ LA SECONDA EQ. NON È VERIFICATA, E QUINDI NON ESISTONO STATI DI EQUILIBRIO.
- CON $\bar{u} = 0$ CI SONO INFINITI STATI DI EQUIL. $\bar{x} = \begin{bmatrix} \alpha \\ -\frac{5}{2}\alpha \end{bmatrix}$

1.3) $$\boxed{G(s) = C(sI-A)^{-1}B} = \boxed{\frac{2(s+10)}{s(s+8)}}$$

- CON $u(t) = imp(t)$, RISULTA $U(s) = 1$ E

$$Y(s) = G(s) \cdot 1 = \frac{5/2}{s} - \frac{1/2}{s+8}$$

$$\Rightarrow \boxed{y(t) = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}e^{-8t}, \quad t \geq 0}$$

ESERCIZIO 2

Si consideri il sistema dinamico descritto dalle seguenti relazioni:

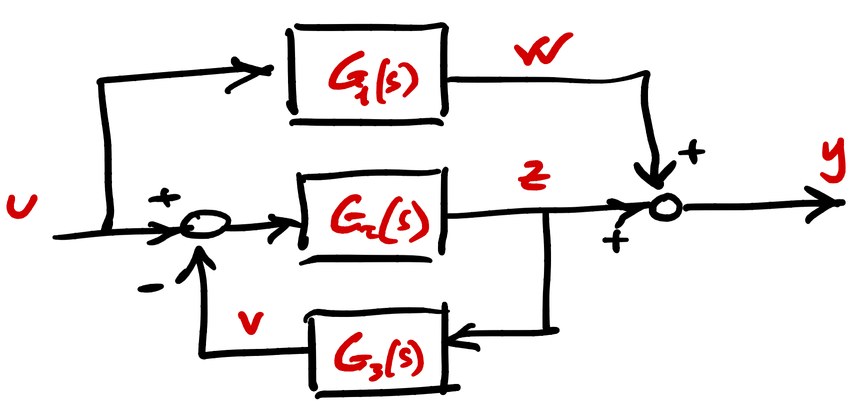
$$\dot{v}(t) = -v(t) + 2z(t)$$
$$\dot{z}(t) = 3u(t) - 3v(t)$$
$$\dot{w}(t) = w(t) + 4u(t)$$
$$y(t) = w(t) + z(t)$$

2.1) Disegnare il corrispondente schema a blocchi dettagliato.

2.2) A partire dallo schema a blocchi, giudicare l'asintotica stabilità del sistema.

2.3) Verificare che il sistema possiede due autovalori complessi coniugati. Calcolarne poi la pulsazione naturale ω_n e lo smorzamento ξ.

2.1)



$$G_1(s) = \frac{4}{s-1}$$
$$G_2(s) = \frac{3}{s}$$
$$G_3(s) = \frac{2}{s+1}$$

2.2) POICHÉ $G_1(s)$ È IN PARALLELO ED È INSTABILE, IL SISTEMA COMPLESSIVO È INSTABILE.

2.3) GLI AUTOVALORI DEL SISTEMA SONO:

- IL POLO 1 DI $G_1(s)$
- LE RADICI DI $1 + G_2(s)G_3(s) = 0$

$$\varphi_{AC}(s) = s(s+1) + 6 = s^2 + s + 6 = s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2$$

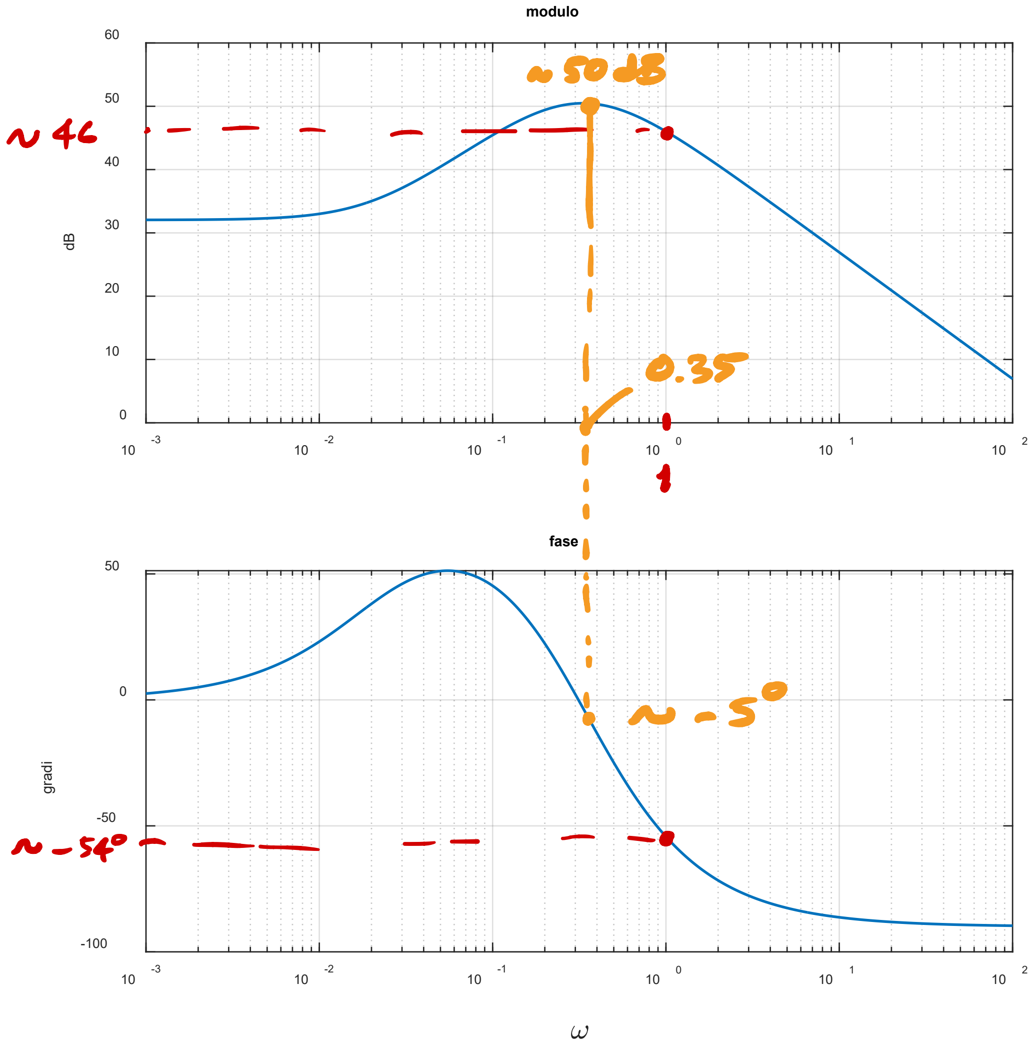
- LE RADICI SONO: $-\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{23}}{2}$ (C. CONIUGATE)

CON $\omega_n = \sqrt{6} \simeq 2.45$

$$\xi = \frac{1}{2\omega_n} = \frac{1}{2\sqrt{6}} \simeq 0.2$$

ESERCIZIO 3

Si consideri un sistema dinamico asintoticamente stabile, con ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$ e funzione di trasferimento $G(s)$, i cui diagrammi di Bode sono riportati nella figura.



3.1) Calcolare l'andamento a regime dell'uscita $y(t)$ in risposta all'ingresso $u(t) = \text{sen}(t) - \text{sca}(t)$.

3.2) Spiegare perché il sistema in esame non può essere considerato un filtro passa-basso.

3.3) Tracciare l'andamento qualitativo del diagramma polare della risposta in frequenza $G(j\omega)$ del sistema. Su tale diagramma, valutare la posizione approssimata del punto a massima distanza dall'origine.

3.1) DAI DIAGRAMMI DI BODE: $\mu \simeq 40$, $|G(j1)| = 10^{46/20} \simeq 200$

$\measuredangle G(j1) \simeq -54 \cdot \frac{\pi}{180} = \simeq -0.94$

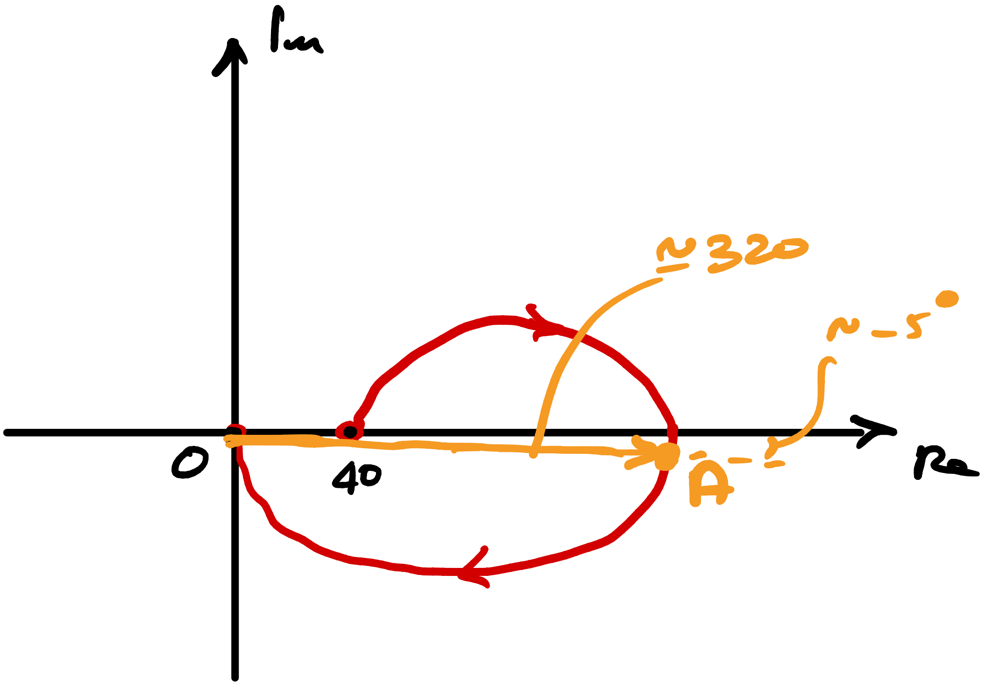
- A REGIME

$$y_\infty(t) \simeq |G(j1)| \,\text{sen}(t + \measuredangle G(j1)) - \mu \simeq$$
$$\simeq 200 \,\text{sen}(t - 0.94) - 40$$

3.2) DAL DIAGRAMMA DEL MODULO SI NOTA CHE IL SISTEMA PRODUCE UN'AMPLIFICAZIONE MAGGIORE A PULSAZIONI INTERMEDIE.

$\Longrightarrow$ NON PUÒ ESSERE CONSIDERATO UN FILTRO PASSA-BASSO.

3.3) DIAGRAMMA POLARE QUALITATIVO



- DAL DIAGRAMMA DEL MODULO:
  MAX AMPLIFICAZIONE IN $\bar{\omega} \simeq 0.35$

$$|G(j\bar{\omega})|_{dB} \simeq 50\,dB$$

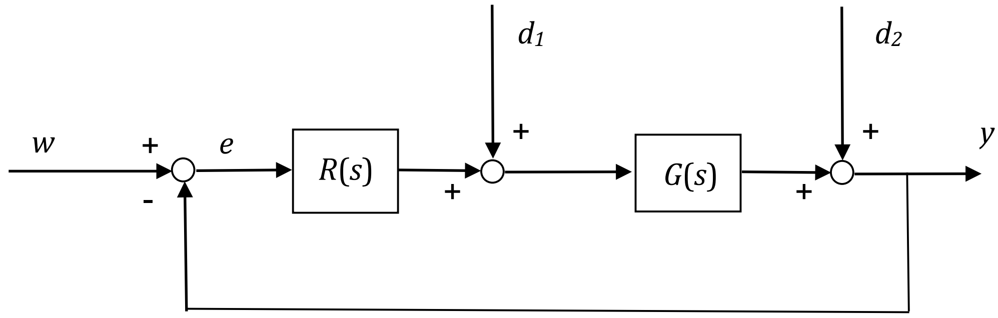
$$|G(j\bar{\omega})| \simeq 10^{5/2} \simeq 320$$

$$\measuredangle G(j\bar{\omega}) \simeq -5^\circ$$

- IL PUNTO A MASSIMA DISTANZA DALL'ORIGINE È IL PUNTO A.

ESERCIZIO 4

Si consideri il sistema di controllo raffigurato nello schema, in cui $G(s) = \frac{2}{s}$, $R(s) = 5$.



4.1) Valutare la pulsazione critica ω_c e il margine di fase φ_m.

4.2) Dire, motivando la risposta, se il sistema presenta una buona precisione statica nell'inseguimento del riferimento $w(t) = A\,\mathrm{sca}(t)$.

4.3) Calcolare l'effetto a regime sull'errore $e(t)$ dei disturbi $d_1(t) = D_1\,\mathrm{sca}(t)$ e $d_2(t) = D_2\,\mathrm{sca}(t)$.

4.1) $L(s) = \frac{10}{s} \Longrightarrow \boxed{\begin{array}{l}\omega_c = 10 \\ \varphi_m = 90^\circ\end{array}}$

4.2) GRAZIE AL TIPO $g=1$ IL SISTEMA HA UN'OTTIMA PRECISIONE STATICA. INFATTI $y(\infty) = A$.

4.3) $G_{ed_1}(s) = -\frac{G(s)}{1+L(s)} = \frac{-2/s}{1+10/s} = \frac{-2}{s+10}$

$G_{ed_1}(0) = -\frac{1}{5}$

- EFFETTO A REGIME DI d_1 : $-D_1/5$

$G_{ed_2}(s) = -\frac{1}{1+L(s)} = \frac{-s}{s+10}$, $G_{ed_2}(0) = 0$

- EFFETTO A REGIME DI d_2 : 0