ESERCIZIO 1

Si consideri il sistema dinamico a tempo continuo descritto dalle seguenti equazioni:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \qquad A = \begin{bmatrix} -0.4 & 0 \\ 0 & -0.6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}$$
$$y(t) = Cx(t)$$

1.1) Calcolare il movimento libero dell'uscita in corrispondenza dello stato iniziale $x(0) = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \end{bmatrix}$.

1.2) Ricavare la matrice (o funzione) di trasferimento del sistema. Spiegare il significato concettuale dei due elementi di tale matrice.

1.3) Sulla base della matrice di trasferimento, valutare l'uscita di equilibrio quando l'ingresso è costante e pari a $\bar{u} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$.

1.1) $y_e(t) = Ce^{At}x(0) = [1 \quad -1] \begin{bmatrix} e^{-0.4t} & 0 \\ 0 & e^{-0.6t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \end{bmatrix} =$

$= 10e^{-0.4t} - 20e^{-0.6t}$

1.2) $G(s) = C(sI-A)^{-1}B = [1 \quad -1] \begin{bmatrix} \frac{1}{s+0.4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+0.6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} \frac{1}{s+0.4} - \frac{1}{s+0.6} & \frac{1}{s+0.4} - \frac{2}{s+0.6} \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} \underbrace{\frac{0.2}{(s+0.4)(s+0.6)}}_{G_1(s)} & \underbrace{\frac{-(s+0.2)}{(s+0.4)(s+0.6)}}_{G_2(s)} \end{bmatrix}$

$G_i(s)$, $i=1,2$ RAPPRESENTA IL RAPPORTO TRA LA TRASF. DELL'USCITA y E LA TRASF. DELL'INGRESSO u_i QUANDO $x(0)=0$ E L'ALTRO INGRESSO È NULLO.

1.3)

$$G(0) = \begin{bmatrix} \underbrace{\frac{5}{6}}_{\mu_1} & \underbrace{-\frac{5}{6}}_{\mu_2} \end{bmatrix}$$

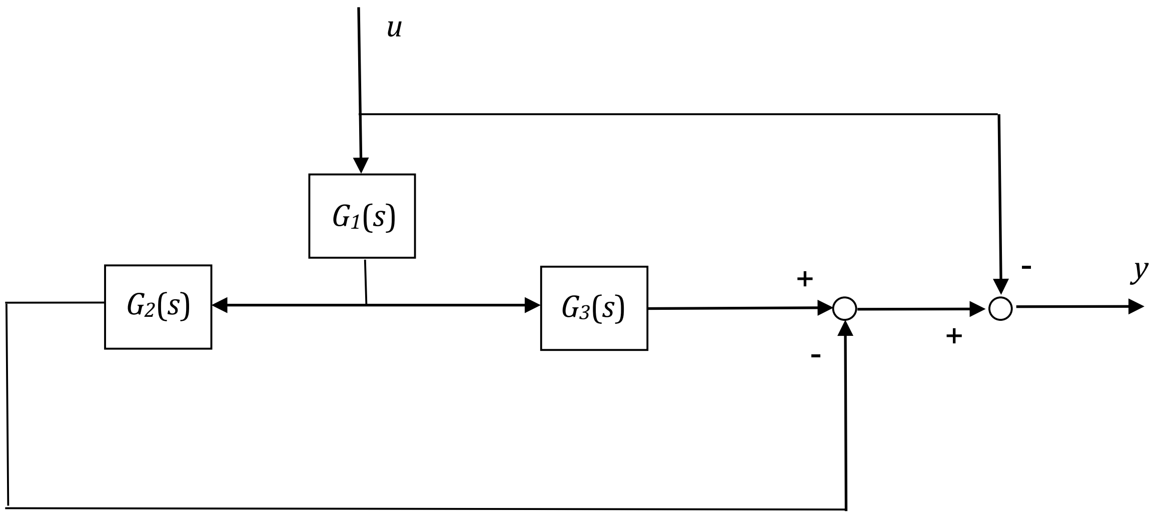
È LA MATRICE DEI GUADAGNI STATICI μ_i

- ALL'EQUILIBRIO

$$\boxed{\bar{y}} = G(0)\bar{u} = \mu_1\alpha + \mu_2\beta = \boxed{\frac{5}{6}(\alpha - \beta)}$$

ESERCIZIO 2

Si consideri il seguente schema a blocchi:



2.1) Calcolare la funzione di trasferimento tra $u(t)$ e $y(t)$.

2.2) Supponendo ora che sia:

$$G_1(s) = \frac{1}{s+2} \quad , \quad G_2(s) = \frac{1}{s} \quad , \quad G_3(s) = 4$$

analizzare l'asintotica stabilità del sistema complessivo.

2.3) Con i valori di $G_1(s)$, $G_2(s)$ e $G_3(s)$ specificati in precedenza, calcolare la risposta di $y(t)$ all'ingresso $u(t) = \text{imp}(t)$.

2.1) $\boxed{G(s) = G_1(s)\left(G_3(s) - G_2(s)\right) - 1}$

2.2) $$G(s) = \frac{1}{s+2}\left(4 - \frac{1}{s}\right) - 1 = \frac{4}{s+2} - \frac{1}{s(s+2)} - 1 =$$

$$= \frac{-s^2+2s-1}{s(s+2)}$$

POLO CON PARTE REALE NEGATIVA

POLO CON PARTE REALE NULLA $\rightarrow$ $\boxed{\text{SISTEMA COMPLESSIVO NON ASINTOTICAMENTE STABILE}}$

2.3)

$$Y(s) = G(s)\cdot 1 = \frac{-s^2+2s-1}{s(s+2)} = \alpha + \frac{\beta}{s} + \frac{\gamma}{s+2}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = -\frac{1}{2} \\ \gamma = \frac{9}{2} \end{cases}$$

$$\boxed{y(t) = -\operatorname{imp}(t) - \frac{1}{2} + \frac{9}{2} e^{-2t}, \quad t \geq 0}$$

ESERCIZIO 3

Si consideri il sistema con ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$ descritto dalla funzione di trasferimento:

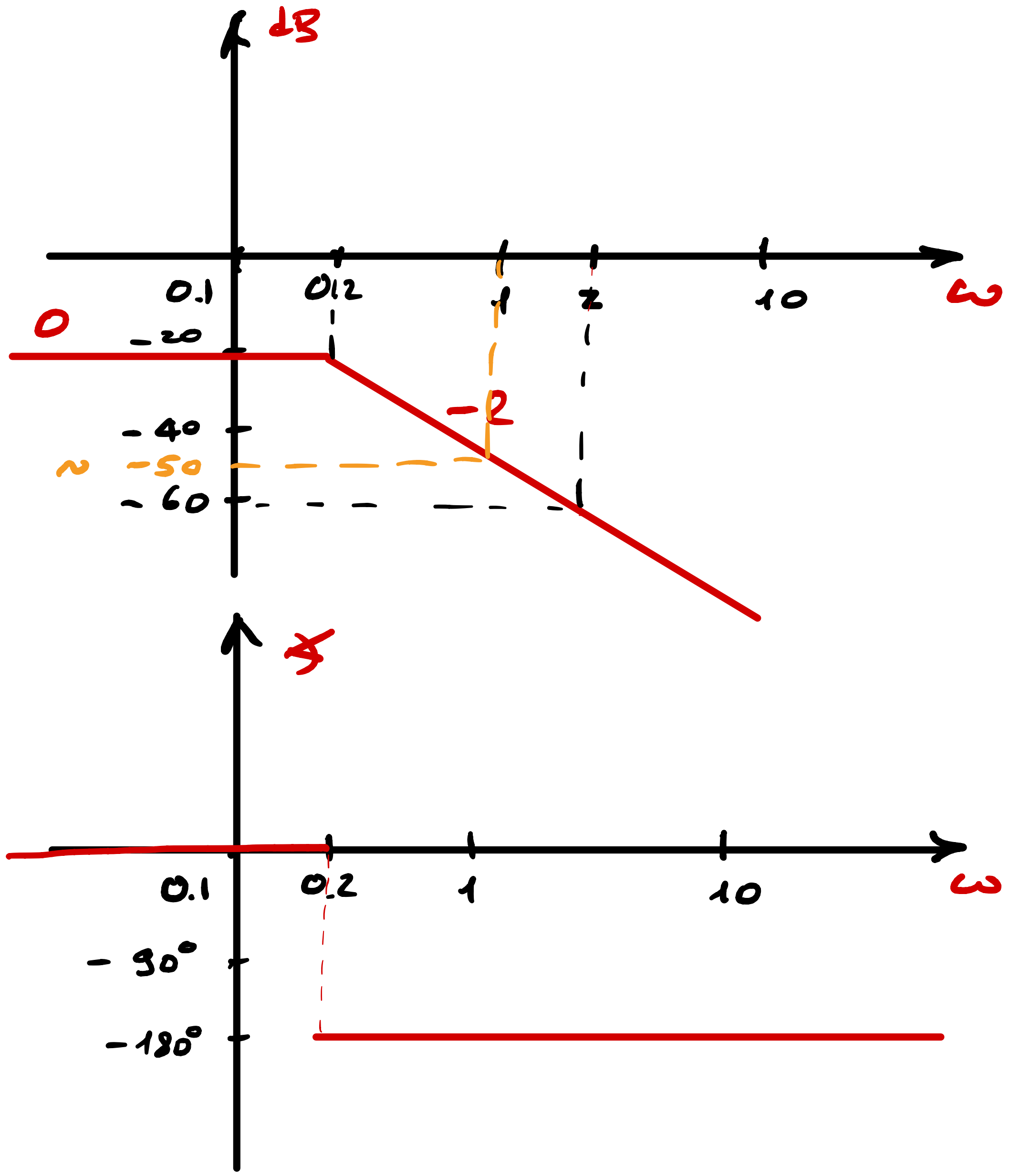
$$G(s) = \frac{0.1}{(1+5s)^2}$$

3.1) Disegnare su un foglio di carta semilogaritmica i diagrammi asintotici di Bode del modulo e della fase associati a $G(s)$.

3.2) In base ai diagrammi, valutare quanto verrebbe amplificato dal sistema l'ingresso $u(t) = \mathrm{sen}(t)$.

3.3) Determinare due funzioni di trasferimento (diverse da $G(s)$) che presentino, rispettivamente, lo stesso diagramma di Bode del modulo di $G(s)$, o lo stesso diagramma di Bode della fase.

3.1)



3.2) DAL DIAGRAMMA DEL MODULO

$$|G(j1)|_{dB} \simeq -50 \text{ dB}$$

$$|G(j1)| = 10^{-5/2} \simeq 0.003$$

FATTORE DI AMPLIFICAZIONE

3.3) PER ESEMPIO:

$$G_1(s) = -G(s)$$

$$G_2(s) = \frac{0.1}{(1-5s)^2}$$

$$G_3(s) = G(s)\,e^{-\tau s}, \quad \tau > 0$$

HANNO LO STESSO DIAGRAMMA DEL MODULO DI $G(s)$

$$G_4(s) = \mu G(s), \quad \mu > 0$$

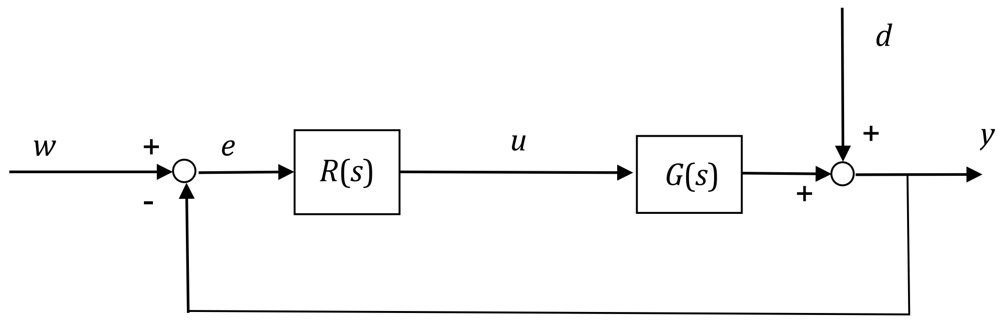
$$G_5(s) = \frac{1-5s}{1+5s}$$

HANNO LO STESSO DIAGRAMMA DELLA FASE DI $G(s)$

ESERCIZIO 4

Si consideri il sistema di controllo raffigurato nello schema, dove il sistema da controllare ha funzione di trasferimento $G(s)=\frac{10}{s+1}$ e si possono usare, in alternativa, i seguenti due regolatori:

$$R_1(s)=2 \quad , \quad R_2(s)=\frac{0.1}{s}$$



4.1) Verificare che, con entrambi i regolatori, il sistema di controllo è asintoticamente stabile.

4.2) Dire, motivando la risposta, quale dei due regolatori produce un errore a transitorio esaurito con valore assoluto più piccolo quando $w(t)=\mathrm{sca}(t)$.

4.3) Dire, motivando la risposta, quale dei due regolatori riesce ad attenuare meglio il disturbo $d(t)$ quando questo è una sinusoide con periodo $T=500$.

4.1) $L_1(s)=R_1(s)G(s)=\dfrac{20}{s+1}$ $\qquad \varphi_{AC1}(s)=s+21$

POLO NEGATIVO

AS. STAB.

$L_2(s)=R_2(s)G(s)=\dfrac{1}{s(s+1)}$ $\qquad \varphi_{AC2}(s)=s^2+s+1$

CARTESIO

AS. STAB.

- IN ALTERNATIVA, IN ENTRAMBI I CASI SI POSSONO APPLICARE I CRITERI DI NYQUIST O DI BODE -

4.2) $e(\infty)=\lim_{s\to 0} s\,\dfrac{-1}{1+L(s)}\cdot\dfrac{1}{s}$

- CON $R_1(s) \longrightarrow e(\infty)=-\dfrac{1}{21}$
- CON $R_2(s) \longrightarrow e(\infty)=0$

VALORE ASSOLUTO PIÙ PICCOLO

4.3) ATTENUAZIONE DI $d(t) = \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{T}t\right) =$

$= \operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{1000}t\right)$

$\quad \llcorner\ \bar{\omega} \simeq 0.0125$

$$a = |S(j\bar{\omega})| = \left| \frac{1}{1+L(j\bar{\omega})} \right|$$

- CON $R_1(s) \longrightarrow \omega_{c1} \simeq 20$

  $\bar{\omega} < \omega_{c1} \implies a \simeq \frac{1}{|L_1(j\bar{\omega})|} \simeq \frac{1}{20}$

- CON $R_2(s) \longrightarrow \omega_{c2} \simeq 1$

  $\bar{\omega} < \omega_{c2} \implies a \simeq \frac{1}{|L_2(j\bar{\omega})|} = \frac{1}{100}$

- SI PUÒ ANCHE VALUTARE a DAI DIAGRAMMI DI BODE DI $|L_1(j\omega)|$ E $|L_2(j\omega)|$