FONDAMENTI DI AUTOMATICA

Anno Accademico 2003/04
Prova in itinere n.1
17 novembre 2003

ATTENZIONE!
I compiti utilizzati per la prova erano leggermente diversi tra di loro.
In questo documento vengono presentati gli esercizi e le relative soluzioni per una sola tipologia di compito.

ESERCIZIO 1

Si consideri il sistema dinamico lineare a tempo continuo descritto dalle seguenti equazioni:

$$\dot{x}_1(t) = x_1(t) + 2x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = 2ax_1(t) + ax_2(t) + 10u(t)$$

$$y(t) = x_1(t)$$

dove a è un parametro reale.

1.1) Dire se ci sono valori di a per cui non esistono stati di equilibrio in corrispondenza di $u(t) = \bar{u} \neq 0$.

1.2) Determinare a in modo che il guadagno statico del sistema sia uguale a 100.

1.3) Discutere per quali valori di a il sistema possiede solo modi puramente esponenziali.

1.4) Discutere per quali valori di a il sistema è asintoticamente stabile.

1.5) Dopo aver precisato cosa si intende per *stabilità esterna* (o *BIBO*) di un sistema, si dica se il sistema in esame con $a = -7$ è stabile esternamente.

ESERCIZIO 2

Si consideri il sistema descritto dallo schema a blocchi di Fig. 1.

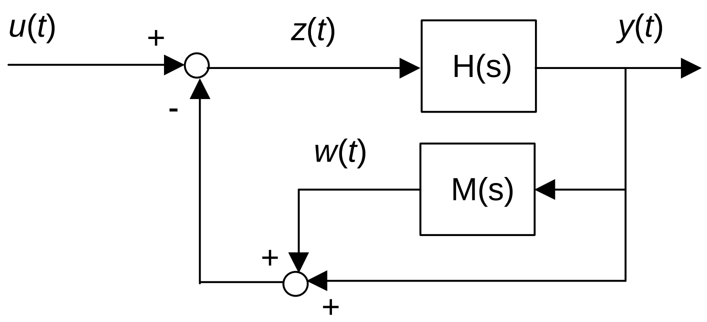


Fig. 1

2.1) Determinare l'espressione della funzione di trasferimento tra l'ingresso *u* e l'uscita *y*.

2.2) Determinare l'espressione della funzione di trasferimento tra l'ingresso *u* e l'uscita *w*.

2.3) Supponendo che sia $H(s) = \dfrac{4}{s+6}$ e $M(s) = \dfrac{2}{s+8}$, valutare se il sistema complessivo è asintoticamente stabile.

2.4) Ancora con gli stessi valori di $H(s)$ e $M(s)$, scrivere una possibile rappresentazione di stato del sistema.

2.5) Sempre con gli stessi valori di $H(s)$ e $M(s)$, calcolare i valori di equilibrio delle variabili *z*, *y*, *w*, quando l'ingresso *u* è costante e uguale a 1.

ESERCIZIO 3

Si consideri il seguente sistema dinamico a tempo discreto:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Fx_k + Gu_k \\ y_k &= Hx_k \end{aligned} \qquad F = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \;,\quad G = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \;,\quad H = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}$$

3.1) Calcolare lo stato di equilibrio e l'uscita di equilibrio corrispondenti a $\bar{u} = 1$.

3.2) Calcolare la funzione di trasferimento del sistema.

3.3) Disegnare nel piano complesso la posizione dei poli e degli zeri del sistema.

3.4) Calcolare la risposta del sistema ad un impulso unitario (a partire da stato iniziale nullo).

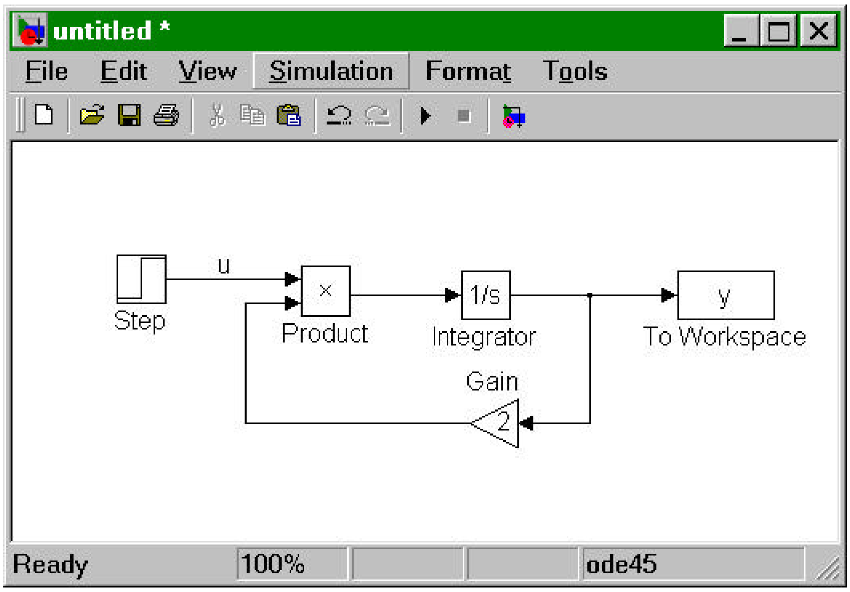
3.5) Dire come si modificherebbe la risposta calcolata al punto precedente se lo stato iniziale fosse $x_0 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

ESERCIZIO 4

4.1) Si scrivano le equazioni corrispondenti al sistema dinamico descritto dal seguente comando Matlab:

» sistema=ss(1,2,3,4);

4.2) Si scrivano le equazioni corrispondenti al sistema dinamico descritto dal seguente schema Simulink:



SOLUZIONE DELL'ESERCIZIO 1

1.1) All'equilibrio deve risultare

$$0 = x_1 + 2x_2$$

$$0 = 2ax_1 + ax_2 + 10\bar{u}$$

Sostituendo la prima equazione nella seconda, risulta

$$3ax_2 = 10\bar{u}$$

Tale equazione ammette sempre soluzione (e quindi lo stato di equilibrio esiste) a meno che sia $a = 0$.
In conclusione, per $a = 0$ il sistema non ammette stati di equilibrio in corrispondenza di $\bar{u} \neq 0$.
D'altra parte, $a = 0$ è proprio il valore di a che rende nullo il determinante della matrice *A*.

1.2) Dall'analisi precedente si ricava che, per $a \neq 0$, lo stato di equilibrio è dato da

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} -\dfrac{20}{3a}\bar{u} \\ \dfrac{10}{3a}\bar{u} \end{bmatrix}$$

e la corrispondente uscita di equilibrio vale

$$\bar{y} = -\frac{20}{3a}\bar{u}$$

Pertanto, il guadagno statico è $m = -\dfrac{20}{3a}$. Perché esso sia uguale a 100, deve essere $a = -\dfrac{1}{15}$.

1.3) Il sistema possiede modi esponenziali solo se gli autovalori sono reali e distinti. Poiché il polinomio caratteristico vale

$$j(l) = \det(lI - A) = \det\begin{bmatrix} l-1 & -2 \\ -2a & l-a \end{bmatrix} = l^2 - (1+a)l - 3a$$

gli autovalori sono reali e distinti quando

$$\Delta = (1+a)^2 + 12a > 0$$

Ciò si verifica per

$$a < -7 - 4\sqrt{3} \qquad \text{oppure} \qquad a > -7 + 4\sqrt{3}$$

1.4) Poiché il sistema è del secondo ordine, per l'asintotica stabilità basta imporre che i tre coefficienti del polinomio caratteristico $j(l)$ siano concordi in segno. Perciò risulta

$$\begin{cases} -(1+a) > 0 \\ -3a > 0 \end{cases}$$

Questo sistema di disequazioni è soddisfatto per $a < -1$.

1.5) In base al ragionamento precedente, con $a = -7$ il sistema è asintoticamente stabile. Per una nota proprietà, questo implica che il sistema è anche stabile BIBO (Bounded-Input Bounded-Output), ovvero l'uscita risulta limitata per ogni ingresso limitato.

SOLUZIONE DELL'ESERCIZIO 2

2.1) La funzione di trasferimento tra *u* e *y* è

$$G_1(s) = \frac{H(s)}{1 + H(s)\big(1 + M(s)\big)}$$

Infatti *H*(*s*) è la funzione in linea di andata, mentre la funzione d'anello è data dal prodotto di *H*(*s*) con il parallelo di *M*(*s*) e 1.

2.2) La funzione di trasferimento tra *u* e *w* è

$$G_2(s) = \frac{H(s)M(s)}{1 + H(s)\big(1 + M(s)\big)}$$

Basta osservare che $W(s) = M(s)Y(s)$ e utilizzare il risultato precedente.

2.3) Per la stabilità occorre valutare i poli di $G_1(s)$ (oppure di $G_2(s)$), cioè le radici di

$$1 + H(s)\big(1 + M(s)\big) = 0$$

Sostituendo i valori di *H*(*s*) e *M*(*s*) si ottiene

$$G_1(s) = \frac{4(s+8)}{(s+6)(s+8) + 4(s+10)} = \frac{4(s+8)}{s^2 + 18s + 88}$$

Poiché il denominatore è di secondo grado ed ha coefficienti con segno concorde, si conclude che il sistema complessivo è asintoticamente stabile.

2.4) Indicando con x_1 e x_2 le uscite dei blocchi *H*(*s*) e *M*(*s*), rispettivamente, si ottiene la seguente rappresentazione di stato (una delle infinite possibili):

$$\dot{x}_1(t) = -6x_1(t) + 4\big(u(t) - x_1(t) - x_2(t)\big)$$
$$\dot{x}_2(t) = -8x_2(t) + 2x_1(t)$$
$$y(t) = x_1(t)$$

2.5) Il valore di $\bar{y}$ si può ottenere calcolando il guadagno statico di $G_1(s)$. Quindi

$$\bar{y} = G_1(0) = 4/11$$

Ragionando poi sullo schema dopo aver sostituito i blocchi *H*(*s*) e *M*(*s*) con i loro guadagni statici $m_H = 2/3$ e $m_M = 1/4$, si ricava facilmente

$$\bar{w} = m_M \bar{y} = 1/11$$
$$\bar{z} = \bar{u} - \big(\bar{w} + \bar{y}\big) = 1 - 5/11 = 6/11$$

SOLUZIONE DELL'ESERCIZIO 3

3.1) Lo stato di equilibrio si ottiene risolvendo il sistema

$$x = Fx + G$$

ed è uguale a

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 14 \end{bmatrix}$$

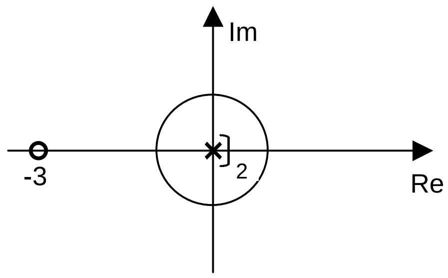
La corrispondente uscita di equilibrio vale

$$\bar{y} = H\bar{x} = 20$$

3.2) La funzione di trasferimento è data da

$$W(z) = H(zI - F)^{-1}G = \frac{5z + 15}{z^2}$$

3.3) Il sistema possiede uno zero in –3 e un polo doppio nell'origine (vedi Figura qua sotto).



3.4) Ci sono vari metodi per calcolare la risposta all'impulso. Ad esempio, indicando con y_{fk} il movimento forzato dell'uscita e con $Y_f(z)$ la sua trasformata Zeta, si trova che

$$Y_f(z) = W(z) = 5z^{-1} + 15z^{-2}$$

e quindi risulta

$$y_{f0} = 0 \quad , \quad y_{f1} = 5 \quad , \quad y_{f2} = 15 \quad , \quad y_{f3} = 0 \quad , \quad y_{f4} = 0 \quad , \quad ......$$

D'altra parte questo è un sistema FIR, la cui risposta all'impulso si annulla dopo un numero finito di passi.

3.5) In questo caso il movimento dell'uscita contiene anche la componente libera y_{lk}, che si può calcolare come $y_{lk} = HF^k x_0$.

Pertanto si ottiene

$$y_{l0} = Hx_0 = -3 \quad , \quad y_{l1} = HFx_0 = -10 \quad , \quad y_{l2} = HF^2 x_0 = 0 \quad , \quad y_{l3} = 0 \quad , \quad ......$$

e il movimento complessivo è dato da $y_k = y_{fk} + y_{lk}$, da cui:

$$y_0 = -3 \quad , \quad y_1 = -5 \quad , \quad y_2 = 15 \quad , \quad y_3 = 0 \quad , \quad y_4 = 0 \quad , \quad ......$$

SOLUZIONE DELL'ESERCIZIO 4

4.1) Il comando Matlab definisce il sistema a tempo continuo

$$\dot{x}(t) = x(t) + 2u(t)$$
$$y(t) = 3x(t) + 4u(t)$$

4.2) Lo schema Simulink descrive un sistema non lineare corrispondente all'equazione differenziale

$$\dot{y}(t) = 2y(t)u(t)$$

con ingresso $u(t)$ a scalino.