FONDAMENTI DI AUTOMATICA

Anno Accademico 2004/05
Prova in itinere n.1
23 novembre 2004

TRACCIA DELLA SOLUZIONE

ESERCIZIO 1

Si consideri il sistema dinamico a tempo continuo descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= -5x_1(t)x_2(t) + \alpha x_2(t) - u(t) \\
\dot{x}_2(t) &= -x_1^2(t) + 4u(t) \\
y_1(t) &= x_1(t)x_2(t) \\
y_2(t) &= 10x_2(t)
\end{aligned}$$

1.1) Determinare il valore del parametro α in modo che, con ingresso $\bar{u} = 1$, il sistema stia in equilibrio con $\bar{y}_1$ positivo e $\bar{y}_2 = 5$.

1.2) In corrispondenza del valore di α prima determinato, calcolare tutti i possibili stati di equilibrio associati all'ingresso $\bar{u} = 1$.

1.3) Giudicare la stabilità degli stati di equilibrio ricavati al punto precedente.

1.4) Dire quali informazioni sarebbero necessarie per poter calcolare univocamente il movimento del vettore di uscita $y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$ a partire dall'istante iniziale $t = 0$.

ESERCIZIO 2

Si consideri il sistema rappresentato dallo schema a blocchi di Figura 1, dove Σ è un sistema dinamico descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ z(t) &= Cx(t)\end{aligned} \qquad A = \begin{bmatrix} -8 & 2 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} -6 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 10 \end{bmatrix}$$

e k è una costante reale.

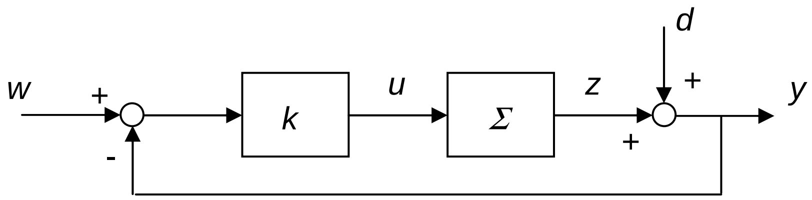


Figura 1

2.1) Calcolare la funzione di trasferimento del sottosistema Σ.

2.2) Spiegare perché è corretto affermare che al variare del parametro k gli autovalori del sistema si modificano.

2.3) Determinare la costante k in modo che la funzione di trasferimento tra $w(t)$ e $y(t)$ abbia due poli reali coincidenti.

2.4) In corrispondenza di tale valore di k, e supponendo nullo $d(t)$, calcolare la risposta di $y(t)$ a uno scalino unitario di $w(t)$.

2.5) Sempre con lo stesso valore di k, e supponendo che gli ingressi w e d siano costanti ed entrambi pari a 1, determinare i valori di equilibrio di u, z e y.

ESERCIZIO 3

Si consideri il sistema a tempo discreto descritto dalla relazione ingresso/uscita:

$$y_{k+1} = 0.7 y_k - u_k + 0.5 u_{k-1} - 0.4 u_{k-2}$$

3.1) Calcolare la funzione di trasferimento tra u_k e y_k.

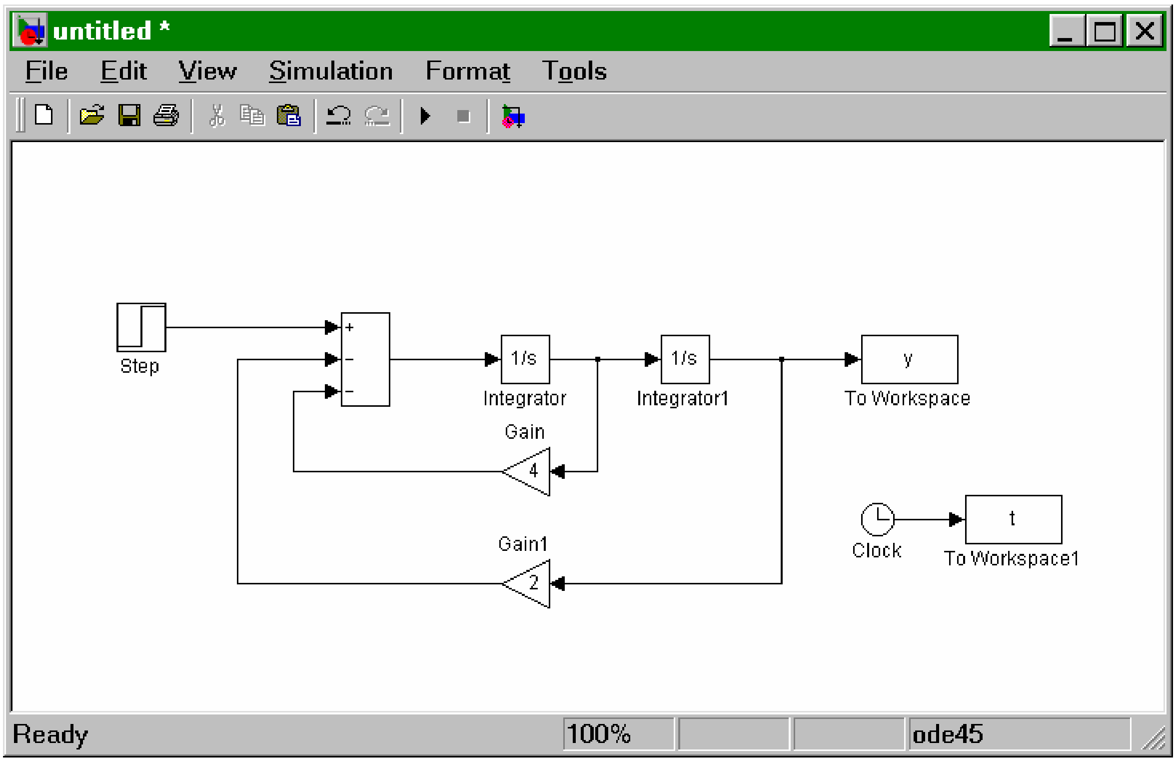
3.2) Giudicare se il sistema è asintoticamente stabile oppure no.

3.3) Determinare i primi valori (per $1 \le k \le 4$) della risposta del sistema all'ingresso $u_k = 10\mathrm{imp}_k$ a partire da condizioni iniziali nulle (cioè con $y_k = 0$, $k \le 0$).

3.4) Determinare una possibile rappresentazione di stato del sistema (si suggerisce di scegliere $x_{1,k} = y_k$, $x_{2,k} = u_{k-1}$ e $x_{3,k} = u_{k-2}$ come variabili di stato).

ESERCIZIO 4

Si scrivano le equazioni corrispondenti al sistema dinamico descritto dal seguente schema Simulink.



SOLUZIONE DELL'ESERCIZIO 1

1.1) Occorre trovare α in modo che siano verificate le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} 0 &= -5x_1x_2 + \alpha x_2 - 1 \\ 0 &= -x_1^2 + 4 \\ y_1 &= x_1x_2 > 0 \\ y_2 &= 10x_2 = 5 \end{aligned}$$

Con semplici passaggi si trova che deve essere $\alpha = 12$.

1.2) Sostituendo il valore $\alpha = 12$ nelle prime due equazioni, si determinano i due seguenti stati di equilibrio:

$$\bar{x}_A = \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad , \quad \bar{x}_B = \begin{bmatrix} -2 \\ \frac{1}{22} \end{bmatrix}$$

1.3) La matrice dinamica del sistema linearizzato è in generale

$$f_x = \begin{bmatrix} -5\bar{x}_2 & \alpha - 5\bar{x}_1 \\ -2\bar{x}_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Valutata rispettivamente in $\bar{x}_A$ e $\bar{x}_B$ essa diventa

$$f_x(\bar{x}_A) = \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} & 2 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad f_x(\bar{x}_B) = \begin{bmatrix} -\frac{5}{22} & 22 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

e i corrispondenti polinomi caratteristici sono

$$\varphi_A = \lambda^2 + \frac{5}{2}\lambda + 8 \quad , \quad \varphi_B = \lambda^2 + \frac{5}{22}\lambda - 88$$

Nel primo caso entrambe le radici sono negative e pertanto lo stato di equilibrio $\bar{x}_A$ è asintoticamente stabile. Nel secondo caso invece c'è una radice positiva e quindi lo stato di equilibrio $\bar{x}_B$ è instabile.

1.4) Per determinare il movimento dell'uscita a partire dall'istante $t = 0$, occorre conoscere lo stato iniziale $x(0)$ e l'andamento dell'ingresso $u(t)$ per $t \geq 0$. Si noti che, poiché il sistema non è lineare, non è possibile utilizzare per il calcolo la formula di Lagrange, né è possibile affermare che il movimento è la somma di una componente libera e di una forzata.

SOLUZIONE DELL'ESERCIZIO 2

2.1) Risulta

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 & 10 \end{bmatrix} \frac{1}{s^2 + 10s + 24} \begin{bmatrix} s+2 & 2 \\ -4 & s+8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{240}{(s+6)(s+4)}$$

2.2) Si noti che la funzione di trasferimento tra *w* e *y* vale

$$F(s) = \frac{kG(s)}{1 + kG(s)} = \frac{240k}{(s+6)(s+4) + 240k}$$

Pertanto la costante *k* influenza le radici del denominatore, e cioè i poli, di *F*(*s*). Essi non sono altro che gli autovalori del sistema complessivo.

2.3) Utilizzando l'espressione di *F*(*s*) prima ricavata, si deve scegliere *k* in modo che il polinomio

$$\varphi(s) = (s+6)(s+4) + 240k = s^2 + 10s + 24(1 + 10k)$$

abbia due radici coincidenti. Ciò avviene quando si annulla il discriminante Δ dell'equazione di secondo grado. Poiché $\Delta = 4(1 - 240k)$, il valore cercato è $k = \dfrac{1}{240}$.

2.4) In corrispondenza di $k = \dfrac{1}{240}$, la funzione di trasferimento tra *w* e *y* vale

$$F(s) = \frac{1}{(s+5)^2}$$

Per ricavare la risposta allo scalino bisogna allora antitrasformare con lo sviluppo di Heaviside

$$Y(s) = \frac{F(s)}{s} = \frac{1}{s(s+5)^2}$$

Risulta

$$Y(s) = \frac{1}{s(s+5)^2} = \frac{\alpha}{s} + \frac{\beta}{s+5} + \frac{\gamma}{(s+5)^2}$$

con i seguenti valori dei coefficienti dello sviluppo:

$$\alpha = \frac{1}{25} \quad , \quad \beta = -\frac{1}{25} \quad , \quad \gamma = -\frac{1}{5}$$

La risposta allo scalino per $t \geq 0$ vale quindi

$$y(t) = \frac{1}{25} - \frac{1}{25}e^{-5t} - \frac{1}{5}te^{-5t}$$

2.5) Dallo schema, all'equilibrio deve risultare

$$y = d + z \quad , \quad z = 10u \quad , \quad u = \frac{1}{240}(w - y)$$

Pertanto con $w = d = 1$ è facile ricavare che deve essere $y = 1$, $u = z = 0$.

SOLUZIONE DELL'ESERCIZIO 3

3.1) Utilizzando la trasformata Zeta direttamente sulla relazione ingresso-uscita si ricava

$$W(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{-z^2 + 0.5z - 0.4}{z^2(z-0.7)}$$

3.2) Il sistema ha due poli coincidenti in $z = 0$ e uno in $z = 0.7$. Poiché tutti hanno modulo minore di 1 il sistema è asintoticamente stabile.

3.3) Calcolando iterativamente la relazione ingresso-uscita nel dominio del tempo con $u_k = 10\text{imp}_k$, oppure effettuando la divisione dei polinomi a numeratore e denominatore di $10W(z)$, si ottiene

$$y_1 = -10 \quad , \quad y_2 = -2 \quad , \quad y_3 = -5.4 \quad , \quad y_4 = -3.78$$

3.4) Una possibile rappresentazione di stato è la seguente:

$$\begin{aligned}
x_{1,k+1} &= 0.7x_{1,k} + 0.5x_{2,k} - 0.4x_{3,k} - u_k \\
x_{2,k+1} &= u_k \\
x_{3,k+1} &= x_{2,k} \\
y_k &= x_{1,k}
\end{aligned}$$

SOLUZIONE DELL'ESERCIZIO 4

Lo schema Simulink corrisponde al seguente sistema dinamico:

$$\dot{x}_1(t) = -4x_1(t) - 2x_2(t) + u(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = x_1(t)$$
$$y(t) = x_2(t)$$

dove $u(t)$ è un ingresso a scalino.