FONDAMENTI DI AUTOMATICA

Anno Accademico 2005/06
Prova in itinere n.1
25 novembre 2005

TRACCIA DELLA SOLUZIONE

ATTENZIONE!
I compiti utilizzati per la prova erano leggermente diversi tra di loro.
In questo documento vengono presentati gli esercizi e le relative soluzioni per una sola tipologia di compito.

ESERCIZIO 1

Si consideri il sistema dinamico a tempo continuo con 2 ingressi descritto dalle seguenti equazioni:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_1 u_1(t) + B_2 u_2(t) \qquad A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \ , \ B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \ , \ B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \ , \ C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \ , \ D_2 = 5$$
$$y(t) = Cx(t) + D_2 u_2(t)$$

1.1) Determinare i valori costanti degli ingressi u_1 e u_2 per cui lo stato di equilibrio vale $\bar{x} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix}$.

1.2) Dire come può essere scomposto il movimento dell'uscita per mettere in evidenza i contributi dei due ingressi e dello stato iniziale.

1.3) Giudicare la stabilità del sistema.

1.4) Calcolare le due funzioni di trasferimento tra i due ingressi u_1 e u_2 e l'uscita y.

1.5) Disegnare uno schema a blocchi dettagliato del sistema, in cui compaiano le componenti x_1 e x_2 dello stato.

ESERCIZIO 2

Si consideri il sistema rappresentato dallo schema a blocchi di Figura 1, dove k è una costante reale e $G(s) = \dfrac{21}{(s+1)(s+7)}$.

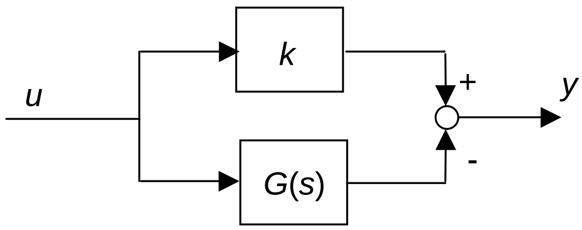


Figura 1

2.1) Dimostrare che i poli della funzione di trasferimento tra u e y non dipendono da k.

2.2) Determinare il valore di k in modo che la funzione di trasferimento tra u e y abbia tipo $g = -1$.

2.3) In corrispondenza del valore di k prima determinato, calcolare mediante lo sviluppo di Heaviside la risposta di y a uno scalino unitario di u.

2.4) Utilizzando il teorema del valore finale, calcolare il valore asintotico $y(\infty)$ della risposta allo scalino, e confrontare il risultato con quello ricavato al punto precedente.

ESERCIZIO 3

Si consideri il sistema a tempo discreto di ordine $n = 1$ descritto dalle seguenti equazioni:

$$x_{k+1} = \frac{1}{2}x_k^3 - \frac{1}{2}u_k x_k + \frac{1}{4}u_k$$

$$y_k = x_k$$

3.1) Determinare tutti i possibili stati di equilibrio corrispondenti a $u_k = -2$.

3.2) Valutare la stabilità degli stati di equilibrio determinati in precedenza.

3.3) Calcolare i primi valori (fino all'istante $k = 3$) della risposta del sistema a uno scalino di ampiezza -2 nei due casi seguenti: (a) a partire da $x_0 = 0$; (b) a partire da $x_0 = 1$.

3.4) Commentare i risultati del calcolo precedente. In particolare, cosa ci si aspetta nei casi (a) e (b) quando $k \to \infty$?

ESERCIZIO 4

Valutare quale sarà il contenuto delle variabili **p**, **z**, **d** dopo l'esecuzione dei seguenti comandi MATLAB:

```
» s1=tf(1,[1 2]);
» s2=tf([2 2],[1 4]);
» p=pole(series(s1,s2));
» z=zero(series(s1,s2));
» d=dcgain(series(s1,s2));
```

SOLUZIONE DELL'ESERCIZIO 1

1.1) Imponendo che sia

$$0 = A\bar{x} + B_1 u_1 + B_1 u_2$$

si trova $u_1 = 0$ e $u_2 = -24$.

1.2) Utilizzando la formula di Lagrange, il movimento dell'uscita è dato da

$$y(t) = Ce^{At}x(0) + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}B_1 u_1(\tau)d\tau + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}B_2 u_2(\tau)d\tau + D_2 u_2(t)$$

Il primo addendo rappresenta il contributo dello stato iniziale (movimento libero); il secondo rappresenta il contributo dell'ingresso u_1; gli ultimi due rappresentano il contributo dell'ingresso u_2.

1.3) Il polinomio caratteristico della matrice A è

$$\varphi(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda - 2)(\lambda + 3)$$

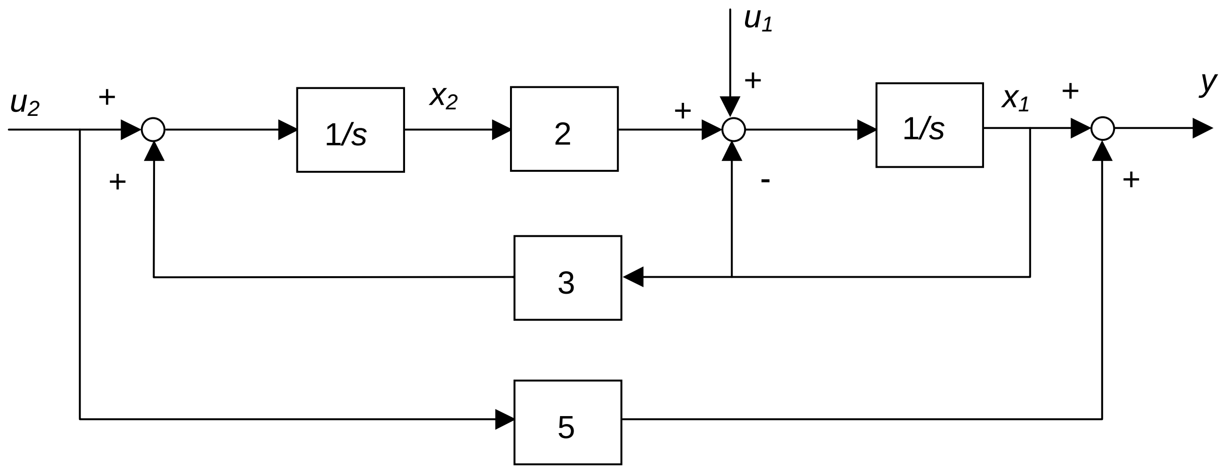
Poiché uno degli autovalori è postivo, il sistema è instabile.

1.4) Risulta

$$G_1(s) = \frac{Y(s)}{U_1(s)} = C(sI - A)^{-1} B_1 = \frac{s}{(s-2)(s+3)}$$

$$G_2(s) = \frac{Y(s)}{U_2(s)} = C(sI - A)^{-1} B_2 + D_2 = \frac{2}{(s-2)(s+3)} + 5 = \frac{5s^2 + 5s - 28}{(s-2)(s+3)}$$

1.5)



SOLUZIONE DELL'ESERCIZIO 2

2.1) La funzione di trasferimento tra *u* e *y* è

$$F(s) = k - G(s) = \frac{ks^2 + 8ks + 7k - 21}{(s+1)(s+7)}$$

e i suoi poli (-1 e -7) non dipendono da *k*.

2.2) Per fare in modo che il numeratore abbia una radice in $s = 0$, basta porre $k = 3$.

2.3) Con $k = 3$, si ha

$$F(s) = \frac{3s^2 + 24s}{(s+1)(s+7)}$$

e la trasformata della risposta allo scalino è

$$Y(s) = \frac{F(s)}{s} = \frac{3s + 24}{(s+1)(s+7)} = \frac{7/2}{s+1} - \frac{1/2}{s+7}$$

Pertanto la risposta allo scalino nel dominio del tempo è

$$y(t) = \frac{7}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-7t}$$

2.4) Mediante il teorema del valore finale si ottiene

$$y(\infty) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} F(s) = 0$$

coerentemente con il fatto che

$$y(\infty) = \lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{7}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-7t}\right) = 0$$

SOLUZIONE DELL'ESERCIZIO 3

3.1) L'unico stato di equilibrio è $\bar{x} = 1$, che è l'unica soluzione reale dell'equazione

$$x = \frac{1}{2}x^3 + x - \frac{1}{2}$$

3.2) L'autovalore del sistema linearizzato vale

$$f_x(\bar{x}, \bar{u}) = \frac{3}{2}\bar{x}^2 - \frac{1}{2}\bar{u} = \frac{5}{2}$$

Poiché il suo modulo è maggiore di 1, lo stato di equilibrio è instabile.

3.3) Iterando l'equazione di stato a partire da $x_0 = 0$ (caso (a)) si ottiene

$$x_1 = -0.5\,,\quad x_2 \cong -1.06\,,\quad x_3 \cong -2.16$$

Partendo invece da $x_0 = 1$ (caso (b)) si ottiene

$$x_1 = x_2 = x_3 = 1$$

3.4) Nel caso (b) il movimento rimane costante perché $\bar{x} = 1$ è lo stato di equilibrio corrispondente all'ingresso $\bar{u} = -2$. Nel caso (a) il movimento diverge per $k \to \infty$, coerentemente con il fatto che lo stato di equilibrio è instabile.

SOLUZIONE DELL'ESERCIZIO 4

Le variabili **p**, **z** e **d** contengono rispettivamente i poli, gli zeri e il guadagno del sistema che si ottiene collegando in serie le due funzioni di trasferimento

$$\frac{1}{s+2} \quad \text{e} \quad \frac{2s+2}{s+4}$$

Quindi **p** è un vettore che contiene i valori -2 e -4, **z** vale -1 e **d** vale 0.25 .