FONDAMENTI DI AUTOMATICA

Anno Accademico 2006/07
Prova in itinere n.1
24 novembre 2006

ATTENZIONE!
I compiti utilizzati per la prova erano leggermente diversi tra di loro. In questo documento vengono presentati gli esercizi e le relative soluzioni per una sola tipologia di compito.

ESERCIZIO 1

Si consideri il sistema dinamico a tempo continuo di ordine $n = 1$ descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= -x^3(t) + 2x^2(t) - u(t) \\ y(t) &= x(t)\end{aligned}$$

1.1) Determinare tutti gli stati di equilibrio corrispondenti all'ingresso nullo.

1.2) Tra gli stati di equilibrio determinati, individuare l'unico asintoticamente stabile e lo si indichi con $\bar{x}$. Scrivere poi le equazioni del sistema linearizzato intorno a $\bar{x}$.

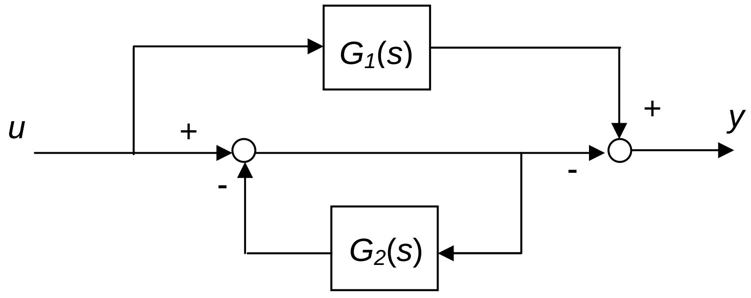
1.3) Calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ del sistema linearizzato.

1.4) Mediante la funzione di trasferimento $G(s)$, calcolare la risposta $\delta x(t)$ del sistema linearizzato a una variazione $\delta u(t) = \varepsilon \ \mathrm{sca}(t)$ dell'ingresso. In particolare valutare $\delta x(\infty)$.

1.5) Dire se è corretto affermare che il valore $\bar{x} + \delta x(\infty)$ rappresenta lo stato di equilibrio del sistema non lineare originario in corrispondenza di $\bar{u} = \varepsilon$.

ESERCIZIO 2

Si consideri il sistema rappresentato dallo schema a blocchi in figura, dove $G_1(s) = \dfrac{3}{1+5s}$, $G_2(s) = \dfrac{2}{s}$.



2.1) Calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ tra *u* e *y*.

2.2) Giudicare l'asintotica stabilità dei sottosistemi $G_1(s)$ e $G_2(s)$ e quella del sistema complessivo $G(s)$.

2.3) Ricavare una rappresentazione di stato del sistema complessivo.

2.4) Verificare che gli autovalori della rappresentazione di stato così ottenuta coincidono con i poli della funzione di trasferimento $G(s)$.

2.5) Dire se il sistema in esame è strettamente proprio oppure no, spiegando il significato di tale caratteristica in riferimento alla risposta allo scalino.

ESERCIZIO 3

Si consideri il sistema lineare a tempo discreto descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Fx_k + Gu_k \\ y_k &= Hx_k \end{aligned} \quad , \quad F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1/24 & 1/12 \end{bmatrix} \quad , \quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3.1) Valutare la stabilità del sistema.

3.2) Calcolare i modi del sistema e spiegare che cosa rappresentano.

3.3) Si consideri la risposta del sistema a un impulso unitario. Calcolare i primi valori (fino all'istante $k = 3$) di tale risposta.

3.4) Dire a cosa converge la risposta all'impulso per $k \to \infty$.

ESERCIZIO 4

Dire che tipo di grafico ci si aspetta che appaia dopo l'esecuzione dei seguenti comandi MATLAB:

```
» s=ss(0,-1,2,0);
» t=0:0.01:1;
» y=step(s,t);
» plot(t,y);
```

SOLUZIONE DELL'ESERCIZIO 1

1.1) Ponendo $u = 0$ e annullando la derivata, si trova che il sistema possiede due stati di equilibrio: $\bar{x}_A = 0$ e $\bar{x}_B = 2$.

1.2) Per giudicare la stabilità degli stati di equilibrio occorre calcolare $f_x(\bar{x}, \bar{u}) = -3\bar{x}^2 + 4\bar{x}$ e valutare tale quantità in corrispondenza dei due stati di equilibrio. In corrispondenza di $\bar{x}_A$ il risultato è nullo e non è possibile trarre conclusioni sulla stabilità. Invece, in corrispondenza di $\bar{x}_B$ il risultato è negativo (uguale a -4) e quindi tale equilibrio è asintoticamente stabile.
Il sistema linearizzato intorno a questo stato di equilibrio è

$$\delta\dot{x}(t) = -4\delta x(t) - \delta u(t)$$
$$\delta y(t) = \delta x(t)$$

1.3) La funzione di trasferimento del sistema linearizzato vale $G(s) = \dfrac{-1}{s+4}$.

1.4) La trasformata di $\delta x(t)$ vale

$$\delta X(s) = \frac{-\varepsilon}{s(s+4)} = \frac{-\varepsilon/4}{s} + \frac{\varepsilon/4}{s+4}$$

e quindi, per $t \geq 0$, risulta

$$\delta x(t) = -\frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4}e^{-4t}$$

In particolare $\delta x(\infty) = -\dfrac{\varepsilon}{4}$.

1.5) Per verificare se $\bar{x} + \delta x(\infty) = 2 - \dfrac{\varepsilon}{4}$ rappresenta effettivamente uno stato di equilibrio del sistema non lineare originario in corrispondenza di $\bar{u} = \varepsilon$, bisognerebbe verificare se è soddisfatta l'uguaglianza

$$0 = -\left(2 - \frac{\varepsilon}{4}\right)^3 + 2\left(2 - \frac{\varepsilon}{4}\right)^2 - \varepsilon$$

In realtà, tale uguaglianza corrisponde a

$$0 = \frac{\varepsilon^3}{64} - \frac{\varepsilon^2}{4}$$

e non è soddisfatta, se non quando $\varepsilon = 0$ oppure $\varepsilon = 16$. Quindi in generale l'affermazione è falsa. D'altra parte un modello linearizzato è solo un'approssimazione del modello non lineare nell'ìntorno di un dato stato di equilibrio.

SOLUZIONE DELL'ESERCIZIO 2

2.1) La funzione di trasferimento cercata è $G(s) = G_1(s) - \dfrac{1}{1+G_2(s)} = \dfrac{-5s^2+2s+6}{(5s+1)(s+2)}$.

2.2) La funzione $G_1(s)$ ha un unico polo negativo e perciò corrisponde a un sistema asintoticamente stabile. La funzione $G_2(s)$ ha un unico polo nell'origine e perciò corrisponde a un sistema semplicemente stabile. La funzione $G(s)$ ha entrambi i poli negativi e perciò corrisponde a un sistema asintoticamente stabile.

2.3) Denotando con x_1 e x_2 le uscite dei due blocchi e interpretando lo schema, una possibile rappresentazione di stato è la seguente:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= -\frac{1}{5}x_1(t) + \frac{3}{5}u(t)\\
\dot{x}_2(t) &= -2x_2(t) + 2u(t)\\
y(t) &= x_1(t) + x_2(t) - u(t)
\end{aligned}$$

2.4) Poiché $A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$, gli autovalori della rappresentazione di stato sono $\lambda_1 = -\frac{1}{5}$ e $\lambda_2 = -2$ e, come si vede, coincidono con i poli di $G(s)$.

2.5) Il sistema in esame non è strettamente proprio poiché l'uscita dipende direttamente dall'ingresso (lo si vede anche solo guardando lo schema a blocchi). Quando un sistema di questo genere viene sollecitato da uno scalino, il valore iniziale dell'uscita risulta diverso da zero e quindi la risposta presenta una discontinuità iniziale.

SOLUZIONE DELL'ESERCIZIO 3

3.1) Il polinomio caratteristico della matrice *F* è

$$\varphi(\lambda) = \lambda\left(\lambda^2 - \frac{1}{12}\lambda - \frac{1}{24}\right) = \lambda\left(\lambda - \frac{1}{4}\right)\left(\lambda + \frac{1}{6}\right)$$

Poiché tutti e tre gli autovalori hanno modulo minore di 1, il sistema è asintoticamente stabile.

3.2) I modi di un sistema lineare a tempo discreto rappresentano le funzioni contenute nella matrice F^k, che determina il movimento libero. Sono associati agli autovalori.

Nel caso in esame, in cui si hanno autovalori reali e distinti, essi valgono $(0)^k$, $\left(\frac{1}{4}\right)^k$, $\left(-\frac{1}{6}\right)^k$.

3.3) Iterando l'equazione di stato del sistema a partire da stato iniziale nullo, e ricordando la definizione di impulso discreto, si ottiene

$$x_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad x_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1/12 \end{bmatrix} \quad , \quad x_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/12 \\ 7/144 \end{bmatrix}$$

e di conseguenza

$$y_0 = 0 \quad , \quad y_1 = 0 \quad , \quad y_2 = 0 \quad , \quad y_3 = 1$$

3.4) Essendo il sistema asintoticamente stabile, la risposta all'impulso converge a 0 per $k \to \infty$.

SOLUZIONE DELL'ESERCIZIO 4

I comandi MATLAB indicati permettono di ottenere il grafico, sull'intervallo $[0,1]$, della risposta allo scalino del sistema del primo ordine descritto da

$$\dot{x}(t) = -u(t)$$
$$y(t) = 2x(t)$$

ovvero con funzione di trasferimento $G(s) = -\frac{2}{s}$.

Il grafico risultante è quindi quello della funzione $y(t) = -2t$ nell'intervallo $[0,1]$.