FONDAMENTI DI AUTOMATICA

Anno Accademico 2007/08
Prova in itinere n.1
23 novembre 2007

Traccia della soluzione

ATTENZIONE!

I compiti utilizzati per la prova erano leggermente diversi tra di loro. In questo documento vengono presentati gli esercizi e le relative soluzioni per una sola tipologia di compito.

ESERCIZIO 1

Si consideri il sistema dinamico a tempo continuo descritto dalle seguenti equazioni:

$$\dot{x}_1(t) = -x_1(t) - 4x_2(t) + u(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = x_1(t) + 4x_2(t) - u(t)$$
$$y(t) = x_1(t)$$

1.1) Determinare tutti gli stati di equilibrio corrispondenti all'ingresso $\bar{u} = 10$.

1.2) Giudicare la stabilità del sistema, utilizzando se possibile, il criterio della traccia.

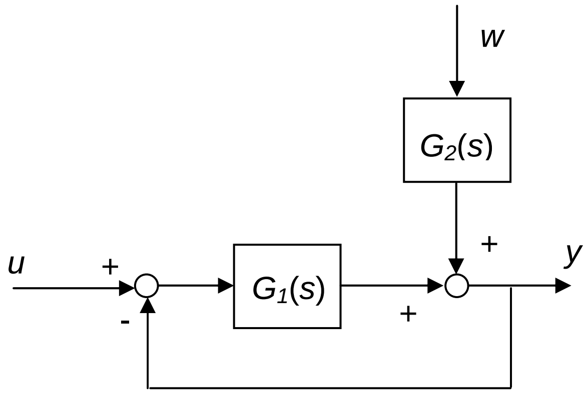
1.3) Verificare che la matrice *A* che descrive la dinamica del sistema è diagonalizzabile. Spiegare anche qual è l'utilità di tale proprietà ai fini del calcolo della matrice e^{At}.

1.4) Calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ del sistema, verificando che nel calcolo avviene una cancellazione. Dimostrare poi che tale cancellazione è dovuta al fatto che, qualunque sia l'ingresso, la quantità $x_1(t) + x_2(t)$ rimane costante.

1.5) Dire come cambierebbe la funzione di trasferimento del sistema se si considerasse l'uscita vettoriale $y(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_1(t) - x_2(t) \end{bmatrix}$.

ESERCIZIO 2

Si consideri il sistema rappresentato dallo schema a blocchi in figura, dove $G_1(s) = \frac{5}{s}$, $G_2(s) = \frac{1}{s+2}$.



2.1) Supponendo di conoscere le trasformate di Laplace $U(s)$ e $W(s)$, dire come si potrebbe calcolare il movimento di $y(t)$ a partire da condizioni iniziali nulle.

2.2) Giudicare l'asintotica stabilità del sistema complessivo.

2.3) Mediante lo sviluppo di Heaviside calcolare il movimento di $y(t)$ a partire da condizioni iniziali nulle quando $u(t) = 0$ e $w(t) = \mathrm{imp}(t)$.

2.4) Utilizzando i teoremi del valore iniziale e finale determinare i valori $y(0)$ e $y(\infty)$ della funzione $y(t)$ calcolata al punto precedente, verificando poi la correttezza dei risultati..

2.5) Calcolare il valore di equilibrio $\bar{y}$ dell'uscita in corrispondenza di ingressi costanti $\bar{u}$ e $\bar{w}$.

ESERCIZIO 3

Si consideri il sistema lineare SISO a tempo discreto descritto dalle equazioni

$$x_{k+1} = Fx_k + Gu_k$$
$$y_k = Hx_k + Lu_k$$

e si supponga che il polinomio caratteristico associato a F sia $\varphi(\lambda) = \det(\lambda I - F) = \lambda^3 + \alpha\lambda^2 + \beta$.

3.1) Precisare quali devono essere le dimensioni delle matrici *F*, *G*, *H*, *L*.

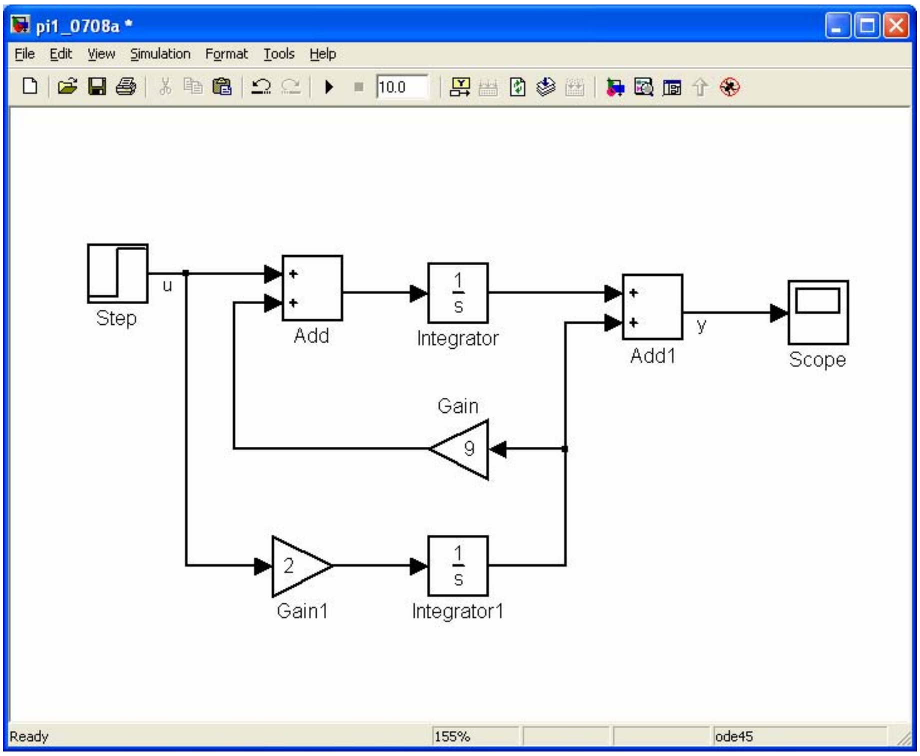
3.2) Spiegare perché per l'asintotica stabilità del sistema è necessario che sia $-1 < \beta < 1$.

3.3) Enunciare una condizione necessaria basata sul solo parametro α perché il sistema sia asintoticamente stabile. Mostrare poi con un esempio che tale condizione non è sufficiente.

3.4) Spiegare in cosa consiste il procedimento della *trasformazione bilineare* per lo studio della stabilità del sistema in esame.

ESERCIZIO 4

Scrivere la rappresentazione di stato del sistema dinamico descritto dal seguente schema Simulink.



SOLUZIONE ESERCIZIO 1

1.1) Gli stati di equilibrio sono le soluzioni del sistema:

$$0 = -x_1 - 4x_2 + 10$$
$$0 = x_1 + 4x_2 - 10$$

Questo sistema ha infinite soluzioni, che possono essere rappresentate, per esempio, come $\bar{x} = \begin{bmatrix} 10-4\alpha \\ \alpha \end{bmatrix}$,

con α generico.

1.2) La matrice A che descrive la dinamica è

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

e la sua traccia è uguale a 3>0. Pertanto il sistema è instabile.

1.3) Il polinomio caratteristico di A è $\varphi(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda(\lambda - 3)$. Gli autovalori sono quindi $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 3$. Essendo distinti, la matrice A è certamente diagonalizzabile.

A riprova di ciò si può costruire la matrice degli autovettori $M = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, che ha come inversa $M^{-1} = \begin{bmatrix} -1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 4/3 \end{bmatrix}$. E' poi immediato verificare che $\hat{A} = M^{-1}AM = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ è diagonale.

La diagonalizzazione è utile per calcolare

$$e^{At} = Me^{\hat{A}t}M^{-1} = M\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix}M^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} - \frac{1}{3}e^{3t} & \frac{4}{3} - \frac{4}{3}e^{3t} \\ -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}e^{3t} & -\frac{1}{3} + \frac{4}{3}e^{3t} \end{bmatrix}$$

1.4) La funzione di trasferimento è

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+1 & 4 \\ -1 & s-4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{s}{s(s-3)} = \frac{1}{s-3}$$

Come si vede è avvenuta una cancellazione che fa scomparire l'autovalore nell'origine. Ciò corrisponde al fatto che c'è una parte nascosta del sistema. In effetti, definendo $z(t) = x_1(t) + x_2(t)$ e sommando le due equazioni differenziali di stato si ottiene:

$$\dot{z}(t) = \dot{x}_1(t) + \dot{x}_2(t) = 0$$

Quindi, la dinamica di $z(t)$ è costante e non viene influenzata dall'ingresso. Pertanto tale dinamica non compare nella funzione di trasferimento.

1.5) In questo caso la funzione di trasferimento è un vettore colonna con 2 righe e vale

$$G(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+1 & 4 \\ -1 & s-4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s-3} \\ \frac{2}{s-3} \end{bmatrix}$$

SOLUZIONE ESERCIZIO 2

2.1) Dallo schema si ricavano le seguenti funzioni di trasferimento, che descrivono separatamente l'effetto su *y* dei due ingressi *u* e *w*:

$$F_{yu}(s) = \frac{G_1(s)}{1+G_1(s)} = \frac{5}{s+5} \quad , \quad F_{yw}(s) = \frac{G_2(s)}{1+G_1(s)} = \frac{s}{(s+5)(s+2)}$$

Pertanto, nel dominio delle trasformate si può scrivere

$$Y(s) = F_{yu}(s)U(s) + F_{yw}(s)W(s)$$

Il corrispondente movimento nel dominio del tempo si ricava poi per antitrasformazione (per esempio con lo sviluppo di Heaviside, se $U(s)$ e $W(s)$ sono razionali).

2.2) Gli autovalori del sistema coincidono con le radici del denominatore di $F_{yw}(s)$, ovvero -5 e -2. Essendo entrambi negativi, il sistema è asintoticamente stabile.

2.3) Con gli ingressi assegnati, usando lo sviluppo di Heaviside risulta

$$Y(s) = F_{yw}(s) = \frac{s}{(s+5)(s+2)} = \frac{5/3}{s+5} - \frac{2/3}{s+2}$$

Il movimento di $y(t)$ è quindi dato da

$$y(t) = \frac{5}{3}e^{-5t} - \frac{2}{3}e^{-2t} \quad , \quad t \geq 0$$

2.4) Con i teoremi del valore iniziale e finale si ottiene, rispettivamente,

$$y(0) = \lim_{s\to\infty} sY(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{s^2}{(s+5)(s+2)} = 1$$

$$y(\infty) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} \frac{s^2}{(s+5)(s+2)} = 0$$

Tali valori coincidono in effetti con quelli ottenibili dall'espressione del movimento nel dominio del tempo.

2.5) Poiché i guadagni statici delle due funzioni di trasferimento sono $\mu_{yu} = F_{yu}(0) = 1$ e $\mu_{yw} = F_{yw}(0) = 0$, all'equilibrio risulta $\bar{y} = \mu_{yu}\bar{u} + \mu_{yw}\bar{w} = \bar{u}$.

SOLUZIONE ESERCIZIO 3

3.1) Visto che il sistema è SISO (Single Input Single Output) e il polinomio caratteristico è di terzo grado, le dimensioni delle matrici sono:

F (3x3) , G (3x1) , H (1x3) , L (1x1)

3.2) Il termine noto β è pari al prodotto degli autovalori di F. Pertanto, se il sistema è asintoticamente stabile, tutti gli autovalori hanno modulo minore di 1 e necessariamente risulta $|\beta|<1$.

3.3) Il coefficiente α coincide con la somma, cambiata di segno, degli autovalori. Quindi, una condizione necessaria per l'asintotica stabilità è che il suo modulo sia minore di 3.
Tale condizione però non è sufficiente: per esempio il polinomio $\lambda^3+\beta$ soddisfa la condizione, ma per $|\beta|>1$ ha radici con modulo maggiore di 1.

3.4) Il procedimento della trasformazione bilineare serve a riportare il problema di verificare che le radici di un dato polinomio abbiano modulo minore di 1 a quello di verificare che le radici di un polinomio, ottenuto dal precedente mediante la sostituzione di variabile $\lambda=\dfrac{1+s}{1-s}$, abbiano parte reale negativa.

SOLUZIONE ESERCIZIO 4

Dallo schema Simulink, indicando con x_1 e x_2 le variabili in uscita dai due integratori, si ricava

$$\dot{x}_1(t) = 9x_2(t) + u(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = 2u(t)$$
$$y(t) = x_1(t) + x_2(t)$$