FONDAMENTI DI AUTOMATICA

Anno Accademico 2008/09
Prova in itinere n.1
17 novembre 2008

Traccia della soluzione

ATTENZIONE!
I compiti utilizzati per la prova erano leggermente diversi tra di loro. In questo documento vengono presentati gli esercizi e le relative soluzioni per una sola tipologia di compito.

ESERCIZIO 1

Si consideri il sistema dinamico a tempo continuo descritto dalle seguenti equazioni:

$$\dot{x}(t) = \left(2u(t) - x(t)\right)\left(\beta x^2(t) + 6\right)$$
$$y(t) = \frac{1}{4}x(t)$$

dove *x*, *u*, e *y* sono variabili reali scalari e β è un parametro reale.

1.1) Con $\beta = 0$, calcolare il movimento dell'uscita quando $x(0) = 1$ e $u(t) = 2 - e^{-t}$, $t \geq 0$, evidenziando la componente libera e quella forzata.

1.2) Ripetere il calcolo precedente utilizzando la trasformata di Laplace.

1.3) Sempre con $\beta = 0$, si consideri il collegamento in parallelo del sistema con quello descritto dalla funzione di trasferimento $G(s) = \dfrac{8}{s-2}$. Dopo aver disegnato il corrispondente schema a blocchi, si calcoli la funzione di trasferimento del sistema complessivo e se ne giudichi la stabilità.

1.4) Al variare di β, determinare tutti gli stati di equilibrio del sistema originario in corrispondenza dell'ingresso $\bar{u} = 2$.

1.5) Giudicare la stabilità degli stati di equilibrio corrispondenti a $\beta = -1$ e $\bar{u} = 2$.

ESERCIZIO 2

Un sistema dinamico a tempo continuo sotto l'azione dell'ingresso $u(t) = \text{sen}(2t)$, applicato a partire dall'istante $t = 0$, ha come uscita forzata $y(t) = 2e^{-t} + \text{sen}(2t) - 2\cos(2t)$.

2.1) Calcolare la trasformata di Laplace dell'uscita forzata $y(t)$.

2.2) Verificare la correttezza del teorema del valore iniziale nel calcolo del valore $y(0)$.

2.3) Spiegare perché non si può applicare il teorema del valore finale per il calcolo di $y(\infty)$.

2.4) Calcolare la funzione di trasferimento del sistema.

ESERCIZIO 3

Si consideri il sistema dinamico a tempo discreto descritto dalle equazioni

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Fx_k + Gu_k \\ y_k &= Hx_k \end{aligned} \qquad F = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad H = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.1) Calcolare lo stato e l'uscita di equilibrio corrispondenti a $\bar{u} = 9$.

3.2) Verificare se, nello studio della stabilità di tale sistema, è applicabile qualche criterio basato sul calcolo della traccia della matrice *F*.

3.3) Giudicare la stabilità del sistema.

3.4) Calcolare i primi valori, fino a $k = 4$, della risposta del sistema a un impulso unitario.

3.5) Verificare che, mediante la retroazione $u_k = 2y_k - v_k$, la risposta di y_k a $v_k = imp_k$ si annulla dopo un numero finito di passi.

ESERCIZIO 4

Valutare il contenuto delle variabili z, p, d dopo l'esecuzione dei seguenti comandi Matlab:

```
» num = [1, 2]; den = [1, 4, 6];
» x = tf(num,den);
» z = zero(x);
» p = pole(x);
» d = dcgain(x);
```

SOLUZIONE DELL'ESERCIZIO 1

1.1) Con $\beta = 0$, il sistema diventa:

$$\dot{x}(t) = -6x(t) + 12u(t)$$

$$y(t) = \frac{1}{4}x(t)$$

Usando le formule di Lagrange si trova che il movimento libero e il movimento forzato dello stato sono rispettivamente dati da:

$$x_l(t) = e^{-6t}$$

$$x_f(t) = \int_0^t e^{-6(t-\tau)} 12(2 - e^{-\tau}) d\tau = 4 - \frac{8}{5}e^{-6t} - \frac{12}{5}e^{-t}$$

Quindi si ricava

$$y_l(t) = \frac{1}{4}e^{-6t}$$

$$y_f(t) = 1 - \frac{2}{5}e^{-6t} - \frac{3}{5}e^{-t}$$

$$y(t) = y_l(t) + y_f(t) = 1 - \frac{3}{20}e^{-6t} - \frac{3}{5}e^{-t}$$

1.2) La trasformata dell'ingresso vale

$$U(s) = \frac{2}{s} - \frac{1}{s+1} = \frac{s+2}{s(s+1)}$$

La trasformata dell'uscita libera è

$$Y(s) = C(sI - A)^{-1}x(0) = \frac{1}{4(s+6)}$$

da cui, antitrasformando,

$$y_l(t) = \frac{1}{4}e^{-6t}$$

La trasformata dell'uscita forzata è, usando lo sviluppo di Heaviside,

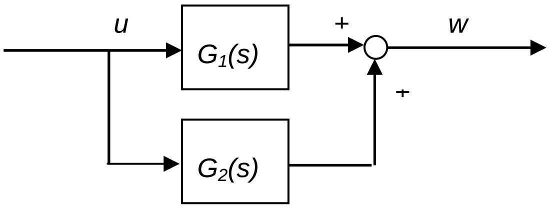
$$Y(s) = C(sI - A)^{-1}BU(s) = \frac{3}{(s+6)} \cdot \frac{s+2}{s(s+1)} = \frac{1}{s} - \frac{3/5}{s+1} - \frac{2/5}{s+6}$$

da cui, antitrasformando,

$$y_f(t) = 1 - \frac{3}{5}e^{-t} - \frac{2}{5}e^{-6t}$$

I risultati coincidono con quelli ricavati in precedenza.

1.3) Lo schema a blocchi è quello mostrato in figura



dove $G_1(s) = \frac{3}{s+6}$, $G_2(s) = \frac{8}{s-2}$.

La funzione di trasferimento complessiva è $H(s) = \frac{3}{s+6} + \frac{8}{s-2} = \frac{11s+42}{(s+6)(s-2)}$, che è palesemente instabile per la presenza di un polo positivo.

1.4) Gli stati di equilibrio sono le soluzioni reali dell'equazione $0 = (4-x)(\beta x^2 + 6)$. Pertanto, se $\beta \geq 0$, l'unico stato di equilibrio è $\bar{x} = 4$. Invece, per $\beta < 0$, il sistema ammette 3 diversi stati di equilibrio:

$$\bar{x}_A = 4 \quad , \quad \bar{x}_B = \sqrt{-\frac{6}{\beta}} \quad , \quad \bar{x}_C = -\sqrt{-\frac{6}{\beta}}$$

1.5) Definendo $f(x) = (4-x)(6-x^2)$, la stabilità può essere giudicata valutando il segno della quantità

$$f_x(x) = -(6-x^2) - 2x(4-x)$$

in corrispondenza degli stati di equilibrio $\bar{x}_A = 4$, $\bar{x}_B = \sqrt{6}$, $\bar{x}_C = -\sqrt{6}$. Risulta $f_x(\bar{x}_A) > 0$, $f_x(\bar{x}_B) < 0$ e $f_x(\bar{x}_C) > 0$, per cui l'unico stato di equilibrio asintoticamente stabile è $\bar{x}_B$. Gli altri due sono invece instabili.

SOLUZIONE DELL'ESERCIZIO 1

2.1) La trasformata dell'uscita forzata è

$$Y(s) = \frac{2}{s+1} + \frac{2}{s^2+4} - \frac{2s}{s^2+4} = \frac{10}{(s+1)(s^2+4)}$$

2.2) Mediante il teorema del valore iniziale si ricava

$$y(0) = \lim_{s\to\infty} sY(s) = 0$$

che coincide con il valore ottenuto valutando $y(t)$ in $t = 0$.

2.3) Il teorema del valore finale non è applicabile perché la trasformata $Y(s)$ possiede due poli con parte reale nulla diversi da 0. In effetti la funzione $y(t)$ non ammette limite per $t \to \infty$.

2.4) La funzione di trasferimento $G(s)$ è data dal rapporto tra le trasformate dell'uscita e dell'ingresso, ovvero

$$G(s) = \frac{10}{(s+1)(s^2+4)} \cdot \left(\frac{2}{s^2+4}\right)^{-1} = \frac{5}{s+1}$$

SOLUZIONE DELL'ESERCIZIO 3

3.1) Per calcolare lo stato e l'uscita di equilibrio occorre risolvere il seguente sistema di equazioni

$$x_1 = -2x_2 + 9$$
$$x_2 = x_1$$
$$y = x_2$$

Pertanto lo stato di equilibrio è $\bar{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$ e l'uscita di equilibrio è $\bar{y} = 3$.

3.2) La traccia di F vale $\mathrm{tr}(F) = 0$. Poiché il sistema è del secondo ordine, condizione necessaria per l'asintotica stabilità è che $|\mathrm{tr}(F)| < 2$. Tale condizione è verificata, ma, essendo solo necessaria e non sufficiente, non permette di trarre conclusioni sulla asintotica stabilità.

3.3) Calcolando il polinomio caratteristico della matrice F si ha

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^2 + 2$$

E quindi gli autovalori sono $\lambda_{1,2} = \pm j\sqrt{2}$. Poiché tali autovalori hanno modulo maggiore di 1, il sistema è instabile.

3.4) Utilizzando iterativamente l'equazione di stato, e ricordando che $u_k = \mathrm{imp}_k$ è diverso da 1 solo in $k = 0$, dove vale 1, a partire da stato iniziale nullo si ottiene:

$$x_1 = Fx_0 + Gu_0 = G = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad x_2 = Fx_1 + Gu_1 = Fx_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$x_3 = Fx_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad x_4 = Fx_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Dalla trasformazione di uscita risulta poi $y_0 = 0$, $y_1 = 0$, $y_2 = 1$, $y_3 = 0$, $y_4 = -2$.

3.5) Con la retroazione indicata il sistema diventa:

$$x_{k+1} = Fx_k + G(2Hx_k - v_k) = (F + 2GH)x_k - Gv_k$$
$$y_k = Hx_k$$

La matrice dinamica di tale sistema vale $F + 2GH = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, ed è quindi nihilpotente (tutti gli autovalori sono uguali a zero). Pertanto il sistema è un FIR e presenta una risposta all'impulso che si annulla in un numero finito di passi. In effetti, partendo da stato iniziale nullo e applicando l'ingresso $v_k = \mathrm{imp}_k$, si ottiene

$$x_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad x_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad , \quad x_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad x_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \ldots$$

e quindi l'uscita si annulla dall'istante $k = 3$ in avanti.

SOLUZIONE DELL'ESERCIZIO 4

Le prime istruzioni definiscono un sistema con funzione di trasferimento $G(s) = \dfrac{s+2}{s^2+4s+6}$.

La variabile z contiene il valore dello zero e cioè -2.
La variabile p è un vettore che contiene i valore dei poli e cioè $-2+j\sqrt{2}$, $-2-j\sqrt{2}$.

La variabile d contiene il valore del guadagno statico e cioè $1/3$.