FONDAMENTI DI AUTOMATICA

Anno Accademico 2009/10
Prova in itinere n.1
20 novembre 2009

Traccia della soluzione

ATTENZIONE!
I compiti utilizzati per la prova erano leggermente diversi tra di loro. In questo documento vengono presentati gli esercizi e le relative soluzioni per una sola tipologia di compito.

ESERCIZIO 1

Si consideri il sistema dinamico a tempo continuo descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad , \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 5 \\ -10 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

1.1) Verificare che il sistema non è asintoticamente stabile.

1.2) Dire se, in generale, è corretto affermare che un sistema LTI non asintoticamente stabile è instabile. La risposta va adeguatamente motivata ed eventualmente corredata da un esempio.

1.3) Determinare tutti gli stati di equilibrio del sistema in esame in corrispondenza di $\bar{u} = 6$.

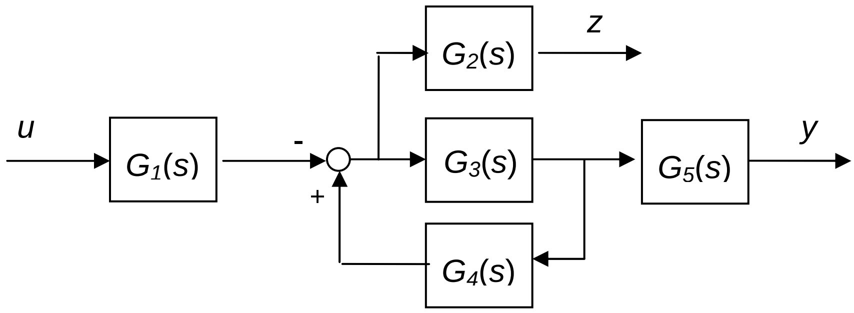
1.4) Calcolare la funzione di trasferimento del sistema.

1.5) Osservando che nel calcolo della funzione di trasferimento aviene una cancellazione, cercare di spiegarne il motivo in termini di proprietà del sistema.

1.6) Determinare il valore iniziale e la pendenza iniziale della risposta di y a un impulso unitario. Se possibile, calcolare anche il valore asintotico di tale risposta.

ESERCIZIO 2

Si consideri il sistema descritto dal seguente schema a blocchi:



2.1) Determinare la funzione di trasferimento tra l'ingresso *u* e l'uscita *y*.

2.2) Determinare la funzione di trasferimento tra l'ingresso *u* e l'uscita *z*.

2.3) Dire quali tra i blocchi devono essere necessariamente stabili perché il sistema complessivo risulti asintoticamente stabile.

2.4) Se $G_4(s)$ ha tipo 1 e le altre funzioni di trasferimento $G_i(s), i \neq 4$ hanno tipo nullo e guadagno positivo, giudicare se i valori all'equilibrio di *y* e *z* in corrispondenza di $\bar{u} > 0$ sono positivi, negativi o nulli.

ESERCIZIO 3

Valutare il contenuto delle variabili s e p dopo l'esecuzione dei seguenti comandi Matlab:

```
» A1 = [-3, 4; 0, -2]; A2=[0, 1]'; A3=[2, -1]; A4=3;
» s = ss(A1,A2,A3,A4);
» p = pole(s);
```

ESERCIZIO 4

Si consideri il sistema dinamico a tempo discreto descritto dalle equazioni (scalari):

$$x_{1,k+1} = x_{1,k} x_{2,k} u_k$$
$$x_{2,k+1} = -x_{1,k} x_{2,k}$$
$$y_k = x_{2,k}$$

4.1) Dire, motivando la risposta, se il sistema in esame è invariante oppure no, e se è strettamente proprio oppure no.

4.2) Discutere come variano gli stati di equilibrio al variare di $\bar{u}$.

4.3) Ponendo ora $\bar{u} = -1$, analizzare la stabilità degli stati di equilibrio.

4.4) Calcolare il movimento dello stato del sistema con $u_k = \text{sca}_k$ e $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

SOLUZIONE DELL'ESERCIZIO 1

1.1) Poiché la traccia della matrice A è positiva, si può immediatamente concludere che il sistema possiede almeno un autovalore con parte reale positiva, e quindi non è asintoticamente stabile (anzi, è addirittura instabile).
Come verifica, il polinomio caratteristico associato ad A è $\varphi(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 + 2$, che non ha tutti i coefficienti concordi in segno e diversi da zero. In effetti le radici sono -1 e $1 \pm j$, e le ultime due hanno parte reale positiva.

1.2) Non è in generale corretto affermare che un sistema non asintoticamente stabile è instabile. Infatti esso potrebbe essere semplicemente stabile. Un esempio è dato dal sistema (di ordine 1):

$$\dot{x}(t) = u(t)$$
$$y(t) = x(t)$$

1.3) L'unico stato di equilibrio associato a $\bar{u} = 6$ è dato da $\bar{x} = \begin{bmatrix} -90 \\ -15 \\ 0 \end{bmatrix}$.

1.4) La funzione di trasferimento è data da

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{-10(s+1)(s+1/2)}{(s+1)(s^2-2s+2)} = \frac{-10(s+1/2)}{(s^2-2s+2)}$$

1.5) La cancellazione del fattore $(s+1)$ è dovuta alla presenza di una parte "nascosta" del sistema. In effetti si può notare che, partendo da stato iniziale nullo, la variabile di stato x_3 rimane nulla in ogni istante e quindi non interviene nel descrivere il legame ingresso/uscita.

1.6) La trasformata della risposta all'impulso è $Y(s) = G(s)$. Mediante il teorema del valore iniziale e il teorema della derivata si ottiene che:

$$y(0) = \lim_{s\to\infty} sG(s) = -10$$
$$\dot{y}(0) = \lim_{s\to\infty} s(sG(s) - y(0)) = -25$$

Non è invece possibile calcolare il valore asintotico perché $Y(s)$ possiede poli con parte reale positiva.

SOLUZIONE DELL'ESERCIZIO 2

2.1) La funzione di trasferimento $F_1(s)$ tra *u* e *y* è data da

$$F_1(s) = \frac{-G_1(s)G_3(s)G_5(s)}{1-G_3(s)G_4(s)}$$

2.2) La funzione di trasferimento $F_2(s)$ tra *u* e *z* è data da

$$F_2(s) = \frac{-G_1(s)G_2(s)}{1-G_3(s)G_4(s)}$$

2.3) Per la stabilità asintotica del sistema complessivo devono essere asintoticamente stabili i blocchi non presenti nell'anello di retroazione e cioè $G_1(s)$, $G_2(s)$ e $G_5(s)$.

2.4) La presenza di un integratore in $G_4(s)$ fa sì che, all'equilibrio, il suo ingresso sia nullo. Pertanto anche la variabile *y*, che è l'uscita di un blocco con guadagno positivo e ingresso nullo, all'equilibrio è nulla. Per lo stesso motivo, anche l'ingresso di $G_3(s)$ all'equilibrio è nullo, Poiché tale variabile è anche l'ingresso di $G_2(s)$, si conclude che, in condizioni di equilibrio, anche la variabile *z* è nulla.

SOLUZIONE DELL'ESERCIZIO 3

Le prime istruzioni definiscono un sistema lineare a tempo continuo descritto dalle equazioni:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix} x(t) + 3u(t) \end{aligned}.$$

La variabile s contiene il sistema e la variabile p è un vettore che contiene i suoi poli e cioè -3, -2.

SOLUZIONE DELL'ESERCIZIO 4

4.1) Il sistema in esame è invariante perché le equazioni non dipendono esplicitamente dal tempo *k*. Inoltre è strettamente proprio perché l'uscita all'istante *k* non dipende dal valore dell'ingresso allo stesso istante.

4.2) Gli stati di equilibrio sono le soluzioni del sistema algebrico

$$x_1(1 - x_2 u) = 0$$

$$x_2(1 + x_1) = 0$$

Pertanto, se $\bar{u} = 0$, l'unico stato di equilibrio è $\bar{x}_A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Se invece è $\bar{u} \neq 0$, gli stati di equilibrio sono due, e cioè $\bar{x}_A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $\bar{x}_B = \begin{bmatrix} -1 \\ 1/\bar{u} \end{bmatrix}$.

4.3) Per analizzare la stabilità degli stati di equilibrio occorre calcolare la matrice dinamica del sistema linearizzato, ovvero

$$f_x(\bar{x}, \bar{u}) = \begin{bmatrix} \bar{x}_2 \bar{u} & \bar{x}_1 \bar{u} \\ -\bar{x}_2 & -\bar{x}_1 \end{bmatrix}$$

Risulta

$$f_x(\bar{x}_A, -1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ed avendo entrambi gli autovalori modulo minore di 1 (sono nulli), lo stato di equilibrio $\bar{x}_A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ è asintoticamente stabile.

Risulta invece

$$f_x(\bar{x}_B, -1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

che ha autovalori $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 2$. Uno degli autovalori ha modulo maggiore di 1 e quindi lo stato di equilibrio $\bar{x}_B = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ è instabile.

4.4) Iterando le equazioni del sistema si trova

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad x_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \ldots \quad , \quad x_k = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \forall k \geq 2$$

cioè il movimento dello stato si assesta in un numero finito di passi su un equilibrio.