FONDAMENTI DI AUTOMATICA

Anno Accademico 2010/11
Prova in itinere n.1
19 novembre 2010

Traccia della soluzione

ATTENZIONE!
I compiti utilizzati per la prova erano leggermente diversi tra di loro. In questo documento vengono presentati gli esercizi e le relative soluzioni per una sola tipologia di compito.

ESERCIZIO 1

Si consideri il sistema LTI a tempo continuo, con 2 ingressi e un'uscita, descritto dalle seguenti equazioni, dove α è un parametro reale e tutte le variabili indicate sono scalari:

$$\dot{x}_1(t) = -8x_1(t) + \alpha x_2(t) - 2v(t) + 5w(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = 3\alpha x_1(t) + v(t)$$
$$y(t) = x_2(t) + w(t)$$

1.1) Discutere la proprietà di stabilità del sistema al variare del parametro α da $-\infty$ a $+\infty$.

1.2) Calcolare in funzione di $\alpha \neq 0$ il vettore dei guadagni statici. Spiegare poi perché tale vettore non è ben definito per $\alpha = 0$.

1.3) Per $\alpha = 0$ scrivere l'espressione del movimento libero dell'uscita corrispondente a $x_1(0) = 2$, $x_2(0) = 3$. In particolare calcolare il valore di tale movimento all'istante $t = 2$.

1.4) Per α generico calcolare la funzione di trasferimento $G_{yv}(s)$ tra l'ingresso *v* e l'uscita *y*.

1.5) Per $\alpha = 0$ calcolare la risposta del sistema a uno scalino unitario di $v(t)$.

ESERCIZIO 2

Si consideri il sistema con ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$ descritto dalla funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{70}{(s+2)(s+7)}$$

2.1) Dire quanto vale, in condizioni di equilibrio, il rapporto $\frac{\bar{y}}{\bar{u}}$.

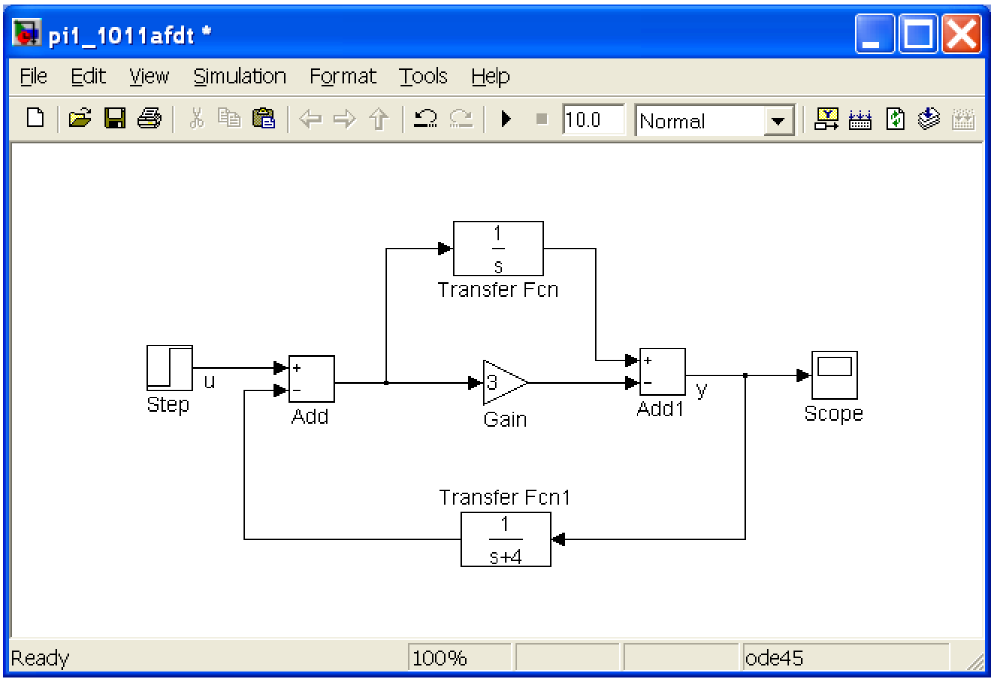
2.2) Calcolare la risposta all'impulso, indicandola con $y_i(t)$.

2.3) Dopo aver eseguito il calcolo del punto precedente, verificare nel caso in esame la correttezza dei due teoremi del valore iniziale e del valore finale.

2.4) Calcolare la derivata rispetto al tempo della risposta all'impulso e verificare che la sua trasformata di Laplace è uguale a $sG(s) - y_i(0)$.

ESERCIZIO 3

Si consideri il sistema descritto dal seguente schema Simulink:



3.1) Sulla base di tale schema, calcolare la funzione di trasferimento tra *u* e *y*.

3.2) Valutare se il sistema è asintoticamente stabile oppure no.

ESERCIZIO 4

Si consideri il sistema dinamico a tempo discreto descritto dalla relazione ingresso-uscita:

$$y_{k+1} = -y_k + 4y_{k-1} + u_k$$

4.1) Mostrare che con la scelta del vettore di stato $x_k = \begin{bmatrix} y_k \\ y_{k-1} \end{bmatrix}$ il sistema ammette una rappresentazione di stato con matrice dinamica $F = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

4.2) Verificare che il sistema è instabile.

4.3) Calcolare lo stato di equilibrio $\bar{x}$ e l'uscita di equilibrio $\bar{y}$ corrispondenti all'ingresso $\bar{u} = 10$.

4.4) Dopo aver scritto l'espressione generale della risposta all'impulso, verificare che per il sistema in esame essa tende a divergere (si consiglia di calcolarne i primi valori).

SOLUZIONE DELL'ESERCIZIO 1

1.1) Il sistema è descritto dalle matrici

$$A=\begin{bmatrix}-8 & \alpha \\ 3\alpha & 0\end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix}B_v & B_w\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 5 \\ 1 & 0\end{bmatrix} \quad , \quad C=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix} \quad , \quad D=\begin{bmatrix}D_v & D_w\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}$$

La stabilità dipende dagli autovalori di *A*, cioè dalle radici del polinomio caratteristico:

$$\varphi(\lambda)=\det(\lambda I-A)=\lambda^2+8\lambda-3\alpha^2$$

Per nessun valore di α esse hanno entrambe parte reale negativa. Quindi il sistema non è mai asintoticamente stabile. Per $\alpha=0$, gli autovalori sono $\lambda_1=0$ e $\lambda_2=-8$ e il sistema è stabole (non asintoticamente). Per $\alpha\neq 0$, i coefficienti del polinomio hanno segni discordi e pertanto il sistema è instabile.

1.2) Imponendo l'equilibrio si trova:

$$0=-8x_1+\alpha x_2-2v+5w$$
$$0=3\alpha x_1+v$$
$$y=x_2+w$$

da cui con semplici passaggi si ricava

$$y=\frac{6\alpha-8}{3\alpha^2}v+\frac{\alpha-5}{\alpha}w$$

Pertanto il vettore dei guadagni statici è $\mu_s=\begin{bmatrix}\mu_{sv} & \mu_{sw}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{6\alpha-8}{3\alpha^2} & \dfrac{\alpha-5}{\alpha}\end{bmatrix}$.

Per $\alpha=0$, tale guadagno non è ben definito perché in tal caso risulta $\det(A)=0$.

1.3) Con $\alpha=0$, la matrice *A* diventa $A=\begin{bmatrix}-8 & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix}$ ed è diagonale. Il movimento libero dell'uscita è dato da:

$$y_l(t)=Ce^{At}x(0)=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{-8t} & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 \\ 3\end{bmatrix}=3$$

Tale movimento è quindi costante e all'istante $t=2$ vale $y_l(2)=3$.

1.4) Risulta

$$G_{yv}(s)=C(sI-A)^{-1}B_v+D_v=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\frac{1}{s^2+8s-3\alpha^2}\begin{bmatrix}s & \alpha \\ 3\alpha & s+8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 \\ 1\end{bmatrix}=\frac{s+8-6\alpha}{s^2+8s-3\alpha^2}$$

1.5) Con $\alpha=0$ si ottiene $G_{yv}(s)=\dfrac{1}{s}$, cioè un puro integratore, per cui la risposta a uno scalino unitario è una rampa unitaria.

SOLUZIONE DELL'ESERCIZIO 2

2.1) All'equilibrio risulta $\dfrac{\bar{y}}{\bar{u}} = G(0) = 5$.

2.2) La risposta all'impulso coincide con l'antitrasformata della funzione di trasferimento, che si può calcolare mediante lo sviluppo di Heaviside. Quindi

$$Y_i(s) = G(s) = \frac{70}{(s+2)(s+7)} = \frac{14}{s+2} - \frac{14}{s+7}$$

$$y_i(t) = 14\left(e^{-2t} - e^{-7t}\right)$$

2.3) Dall'espressione di $y_i(t)$ si nota che sono nulli entrambi i valori $y_i(0)$ e $y_i(\infty)$. In effetti, applicando i teoremi del valore iniziale e finale si ottiene

$$y_i(0) = \lim_{s\to\infty} sG(s) = 0$$

$$y_i(\infty) = \lim_{s\to 0} sG(s) = 0$$

Il teorema del valore finale è applicabile perché entrambi i poli della trasformata hanno parte reale negativa.

2.4) La derivata di $y_i(t)$ è $z(t) = 14\left(-2e^{-2t} + 7e^{-7t}\right)$. La sua trasformata di Laplace vale

$$Z(s) = 14\left(\frac{-2}{s+2} + \frac{7}{s+7}\right) = \frac{70s}{(s+2)(s+7)}$$

che coincide con $sG(s) - y_i(0) = sG(s)$.

SOLUZIONE DELL'ESERCIZIO 3

3.1) La funzione di trasferimento cercata è

$$G(s)=\frac{\frac{1}{s}-3}{1+\left(\frac{1}{s}-3\right)\frac{1}{(s+4)}}=\frac{(s+4)(1-3s)}{s(s+4)+1-3s}=\frac{-3s^2-11s+4}{s^2+s+1}$$

3.2) Osservando che il denominatore di $G(s)$ è un polinomio di secondo grado con coefficienti concordi in segno si conclude che il sistema è asintoticamente stabile.

SOLUZIONE DELL'ESERCIZIO 4

4.1) Si ottiene

$$x_{k+1} = Fx_k + Gu_k$$
$$y_k = Hx_k$$

con

$$F = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

4.2) Gli autovalori sono le radici del polinomio

$$\varphi(\lambda) = \det(\lambda I - F) = \lambda^2 + \lambda - 4$$

Poiché l'ultimo coefficiente è in modulo maggiore di 1, almeno uno degli autovalori ha modulo maggiore di 1 e quindi il sistema è instabile.

4.3) Per calcolare lo stato di equilibrio corrispondente a $\bar{u} = 10$ occorre risolvere il sistema

$$x = Fx + 10G$$

La soluzione è $\bar{x} = \begin{bmatrix} -5 \\ -5 \end{bmatrix}$. La corrispondente uscita di equilibrio è $\bar{y} = -5$.

4.4) La risposta all'impulso è data da $y_k = \begin{cases} 0 & k = 0 \\ HF^{k-1}G & k > 0 \end{cases}$.

I primi valori della risposta sono

$$y_0 = 0 \quad , \quad y_1 = HG = 1 \quad , \quad y_2 = HFG = -1 \quad , \quad y_3 = HF^2G = 5 \quad , \quad y_4 = HF^3G = -9 \quad ,$$
$$y_5 = HF^4G = 29 \quad , \quad \ldots$$

Come si vede, la risposta tende a divergere per *k* tendente all'infinito.