FONDAMENTI DI AUTOMATICA

Anno Accademico 2011/12
Prova in itinere n.1
18 novembre 2011

Traccia della soluzione

ATTENZIONE!
I compiti utilizzati per la prova erano leggermente diversi tra di loro. In questo documento vengono presentati gli esercizi e le relative soluzioni per una sola tipologia di compito.

ESERCIZIO 1

Si consideri il sistema dinamico a tempo continuo descritto dalle seguenti equazioni, dove α è un parametro reale:

$$\dot{x}_1(t) = \alpha x_1^2(t)x_2(t) - x_1(t) - u(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = -4x_1(t) + \alpha x_2(t) + u(t)$$
$$y(t) = 2x_1(t) + x_2(t)$$

1.1) Ponendo inizialmente $\alpha = 2$, determinare nel piano di stato (x_1, x_2) tutti gli stati di equilibrio associati all'ingresso nullo.

1.2) Ancora con $\alpha = 2$ e ingresso nullo, studiare la stabilità dello stato di equilibrio in cui l'uscita è negativa.

1.3) Ponendo ora $\alpha = 0$, studiare la stabilità del sistema LTI risultante.

1.4) Si consideri $\alpha = 0$ e stato iniziale nullo. Trasformando con la trasformata di Laplace le equazioni del sistema, ricavare il rapporto tra la trasformata dell'uscita e quella dell'ingresso. Dire poi se tale rapporto possiede uno zero nel semipiano destro.

ESERCIZIO 2

Si consideri un sistema LTI il cui polinomio caratteristico è $\varphi(\lambda) = \lambda^3 + 5\lambda^2 + 3\lambda + 2$

2.1) Spiegare perché il fatto che l'ultimo coefficiente del polinomio sia positivo è condizione necessaria per l'asintotica stabilità del sistema.

2.2) Verificare se il sistema è asintoticamente stabile.

2.3) Indicare l'istruzione Matlab che si dovrebbe usare per calcolare le radici del polinomio $\varphi(\lambda)$.

2.4) Dire, motivando la risposta, se tra i modi del sistema ce n'è almeno uno di tipo esponenziale.

ESERCIZIO 3

La variabile di ingresso di un sistema dinamico abbia il seguente andamento:

$$u(t) = \begin{cases} 0 & , t < 2 \\ 3 & , 2 \leq t < 4 \\ 2 & , t \geq 4 \end{cases}$$

3.1) Dopo aver disegnato il grafico di $u(t)$, calcolare la trasformata di Laplace $U(s)$, applicando la definizione.

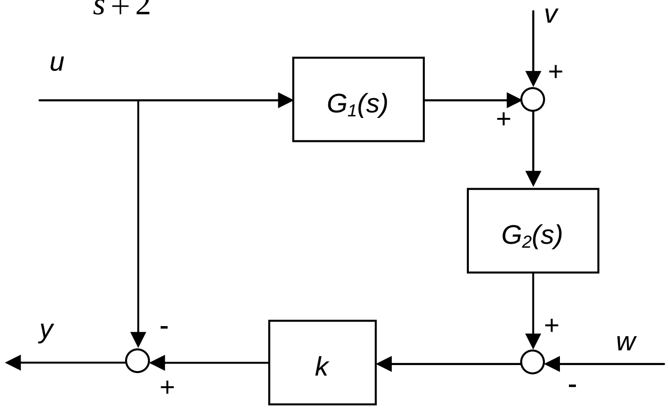
3.2) Ricalcolare in maniera alternativa $U(s)$ esprimendo $u(t)$ come combinazione lineare di opportune funzioni a scalino.

3.3) A partire da $U(s)$ verificare la correttezza del Teorema del valore finale e del Teorema del valore iniziale.

ESERCIZIO 4

Si consideri il sistema descritto dallo schema a blocchi mostrato in figura, dove

$$G_1(s) = \frac{2(s+8)}{s+6} \quad , \quad G_2(s) = \frac{3}{s+2} \quad , \quad k = 10$$



4.1) Calcolare la funzione di trasferimento tra *u* e *y*.

4.2) Considerando le 3 diverse funzioni di trasferimento tra gli ingressi *u*, *v*, e *w* e l'uscita *y*, dire quale di esse risulta strettamente propria e quale di esse descrive un legame puramente statico.

4.3) Calcolare il vettore dei guadagni statici tra i 3 ingressi e l'uscita *y*.

4.4) Calcolare il movimento di $y(t)$ in risposta a $u(t) = -\text{sca}(t)$, $v(t) = \text{imp}(t)$, $w(t) = \text{sca}(t-3)$.

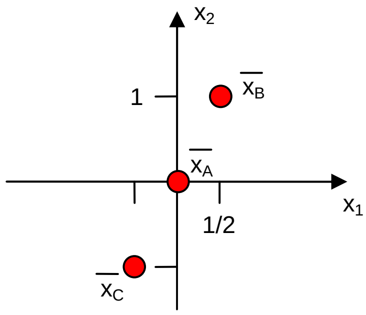
SOLUZIONE DELL'ESERCIZIO 1

1.1) Annullando le derivate, si ottiene il sistema algebrico

$$\begin{cases} x_1(2x_1x_2 - 1) = 0 \\ x_2 = 2x_1 \end{cases}$$

che ha 3 soluzioni, precisamente: $\bar{x}_A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\bar{x}_B = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\bar{x}_C = \begin{bmatrix} -1/2 \\ -1 \end{bmatrix}$.

In figura è mostrata la posizione nel piano (x_1, x_2) dei 3 stati di equilibrio.



1.2) Lo stato di equilibrio per cui l'uscita è negativa è $\bar{x}_C$. La corrispondente matrice dinamica del sistema linearizzato vale

$$f_x(\bar{x}, \bar{u}) = \begin{bmatrix} 4\bar{x}_1\bar{x}_2 - 1 & 2\bar{x}_1^2 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

E il suo polinomio caratteristico è $\varphi(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 4$. Poiché i segni sono discordi, almeno una delle radici ha parte reale positiva (in realtà entrambe ce l'hanno) e quindi lo stato di equilibrio risulta instabile.

1.3) Il sistema risultante è

$$\dot{x}_1(t) = -x_1(t) - u(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = -4x_1(t) + u(t)$$
$$y(t) = 2x_1(t) + x_2(t)$$

La cui matrice dinamica è $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$, che è triangolare. Gli autovalori sono quindi $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 0$ e il sistema risulta semplicemente stabile (cioè stabile, ma non asintoticamente).

1.4) Trasformando con Laplace le equazioni del sistema si ottiene:

$$\begin{cases} sX_1(s) = -X_1(s). - U(s) \\ sX_2(s) = -4X_1(s). + U(s) \\ Y(s) = 2X_1(s). + X_2(s) \end{cases}$$

da cui, con semplici passaggi, si ricava: $Y(s)/U(s) = G(s) = \dfrac{5-s}{s(s+1)}$

Si conclude quindi che la funzione di trasferimento ha uno zero nel semipiano destro (in $s = 5$).

SOLUZIONE DELL'ESERCIZIO 2

2.1) L'ultimo coefficiente φ_3 è pari al prodotto delle radici cambiato di segno. Quindi, se tutte le radici hanno parte reale negativa (ipotesi di asintotica stabilità), il loro prodotto è negativo e φ_3 deve risultare necessariamente positivo.

2.2) Si usa la taabella di Routh, che nel caso in esame è:

$$\begin{array}{ll} 1 & 3 \\ 5 & 2 \\ 13/5 & 0 \\ 2 & 0 \end{array}$$

Poiché tutti gli elementi della prima colonna sono diversi da zero e concordi in segno, si conclude che il sistema è asintoticamente stabile.

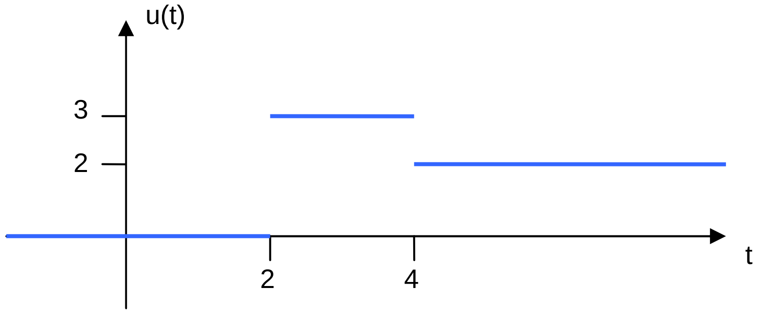
2.3) L'istruzione Matlab è

```
>> radici = roots([1 5 3 2]);
```

2.4) Poiché il numero delle radici del polinomio è dispari, almeno una di esse deve essere reale. Quindi tra i modi c'è sicuramente almeno un modo esponenziale.

SOLUZIONE DELL'ESERCIZIO 3

3.1) Il grafico di $u(t)$ è mostrato in figura.



Dalla definizione di trasformata di Laplace si ricava

$$U(s) = \int_2^4 3e^{-st}dt + \int_4^\infty 2e^{-st}dt = -3\left[\frac{e^{-st}}{s}\right]_2^4 - 2\left[\frac{e^{-st}}{s}\right]_4^\infty$$

Assumendo ora che sia $\mathrm{Re}(s) < 0$, si ha

$$U(s) = -\frac{3}{s}\left(e^{-4s} - e^{-2s}\right) - \frac{2}{s}\left(0 - e^{-4s}\right) = \frac{3}{s}e^{-2s} - \frac{1}{s}e^{-4s}$$

3.2) La funzione $u(t)$ può essere espressa come $u(t) = 3\mathrm{sca}(t-2) - \mathrm{sca}(t-4)$.

Ricordando che la trasformata dello scalino è $1/s$ e che una traslazione nel tempo di τ corrisponde a moltiplicare la trasformata per $e^{-s\tau}$, si ottiene ancora

$$U(s) = \frac{3}{s}e^{-2s} - \frac{1}{s}e^{-4s}$$

3.3) Il teorema del valore iniziale fornisce

$$u(0) = \lim_{s\to\infty} sU(s) = \lim_{s\to\infty}\left(3e^{-2s} - e^{-4s}\right) = 0$$

Il teorema del valore finale fornisce

$$u(\infty) = \lim_{s\to 0} sU(s) = \lim_{s\to 0}\left(3e^{-2s} - e^{-4s}\right) = 2$$

Entrambi i valori sono coerenti con la definzione della funzione $u(t)$.

SOLUZIONE DELL'ESERCIZIO 4

4.1) La funzione di trasferimento tra *u* e *y* è data da

$$G_u(s) = -1 + kG_1(s)G_2(s) = -1 + \frac{60(s+8)}{(s+6)(s+2)} = \frac{-s^2+52s+468}{(s+6)(s+2)}$$

4.2) Direttamente dallo schema a blocchi si nota che, mentre *u* e *w* producono un effetto istantaneo su *y*, ciò non avviene per *v* che influenza l'uscita anche attraverso il blocco strettamente proprio $G_2(s)$.

Inoltre, sempre dallo schema si osserva che tra *w* e *y* c'è un legame puramente statico.

Agli stessi risultati si perviene calcolando esplicitamente le 3 funzioni di trasferimento:

$$G_u(s) = \frac{-s^2+52s+468}{(s+6)(s+2)} \qquad \text{che non è strettamente propria}$$

$$G_v(s) = kG_2(s) = \frac{30}{s+2} \qquad \text{che è strettamente propria}$$

$$G_w(s) = -k = -10 \qquad \text{che è puramente statica}$$

4.3) Tutte e 3 le funzioni hanno tipo nullo, e pertanto il vettore dei guadagni statici è dato da

$$\mu_s = \begin{bmatrix} G_u(0) & G_v(0) & G_w(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 39 & 15 & -10 \end{bmatrix}$$

4.4) Sovrapponendo gli effetti dei 3 ingressi si ricava:

$$Y(s) = G_u(s)U(s) + G_v(s)V(s) + G_w(s)W(s) = -\left(-1 + \frac{60(s+8)}{(s+6)(s+2)}\right)\frac{1}{s} + \frac{30}{s+2} - 10\frac{e^{-3s}}{s} =$$

$$= \frac{1}{s} - \frac{60(s+8)}{s(s+6)(s+2)} + \frac{30}{s+2} - 10\frac{e^{-3s}}{s}$$

Effettuando ora lo sviluppo di Heaviside del secondo termine si ottiene:

$$\frac{60(s+8)}{s(s+6)(s+2)} = \frac{40}{s} + \frac{5}{s+6} - \frac{45}{s+2}$$

In conclusione, facendo l'antitrasformata e mettendo insieme i termini simili, si trova, per $t \geq 0$,

$$y(t) = -39\,\mathrm{sca}(t) - 5e^{-6t} + 75e^{-2t} - 10\,\mathrm{sca}(t-3)$$