FONDAMENTI DI AUTOMATICA

Anno Accademico 2012/13
Prova in itinere n.1
23 novembre 2012

Traccia della soluzione

ATTENZIONE!

I compiti utilizzati per la prova erano leggermente diversi tra di loro. In questo documento vengono presentati gli esercizi e le relative soluzioni per una sola tipologia di compito.

ESERCIZIO 1

Si consideri il sistema dinamico descritto dalle seguenti equazioni, dove α è un parametro reale:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \qquad A = \begin{bmatrix} \alpha & 3 \\ 4 & \alpha \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad , \quad C = \begin{bmatrix} 5 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad D = 1$$

1.1) Enunciare una condizione necessaria per l'asintotica stabilità del sistema in esame basata sul determinante di A.

1.2) Enunciare una condizione necessaria e sufficiente per l'asintotica stabilità del sistema in esame, verificando che è più restrittiva della precedente.

1.3) Calcolare, per α generico, la funzione di trasferimento del sistema.

1.4) Dopo aver determinato un valore di α in modo che il guadagno statico sia $\mu_s = 10$, dire se in tal caso la risposta allo scalino tende asintoticamente a μ_s.

ESERCIZIO 2

Si consideri il seguente sistema a tempo discreto, con 2 variabili di stato, 2 ingressi e 2 uscite:

$$x_{1,k+1} = 0.1x_{1,k}\left(x_{2,k} + u_{1,k}\right)$$
$$x_{2,k+1} = -0.5x_{2,k}\left(x_{1,k} + u_{2,k}\right)$$
$$y_k = x_k$$

2.1) Calcolare tutti i possibili stati di equilibrio associati all'ingresso $\bar{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

2.2) Per ciascuno stato di equilibrio individuato valutare le proprietà di stabilità.

2.3) Calcolare il movimento dello stato con ingresso $u_k = \bar{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $k \geq 0$ a partire da $x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ e mostrare che tale movimento converge asintoticamente a zero.

ESERCIZIO 3

Si consideri un sistema LTI a tempo continuo con ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$ descritto dalla funzione di trasferimento $G(s) = \dfrac{10s}{3s^2 + 15s + 12}$.

3.1) Calcolare poli, zeri, tipo e guadagno della funzione di trasferimento $G(s)$. Calcolare poi il guadagno statico del sistema.

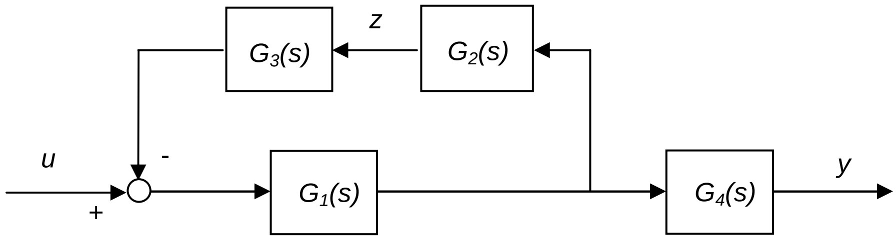
3.2) Attraverso i teoremi del valore iniziale e del valore finale, determinare i valori $y(0)$ e $y(\infty)$ della risposta del sistema a un impulso unitario. Dire poi se tali valori cambierebbero in presenza di uno stato iniziale diverso da zero.

3.3) Mediante lo sviluppo di Heaviside, determinare la risposta all'impulso del sistema.

3.4) Scrivere le istruzioni Matlab che definiscono il sistema, ne calcolano la risposta allo scalino e ne determinano una realizzazione.

ESERCIZIO 4

Si consideri il sistema descritto dallo schema a blocchi mostrato in figura.



4.1) Calcolare l'espressione della funzione di trasferimento $G(s)$ tra u e y.

4.2) Supponendo ora

$$G_1(s)=\frac{1}{s} \quad , \quad G_2(s)=k \quad , \quad G_3(s)=\frac{1}{s-2} \quad , \quad G_4(s)=\frac{1}{s+h} \quad , \quad h\neq 0$$

determinare per quali valori dei parametri h e k il sistema complessivo risulta asintoticamente stabile.

4.3) Determinare per quali valori dei parametri h e k avviene una cancellazione nel calcolo di $G(s)$. Spiegare cosa questo significa.

4.4) Supponendo $u(t)=\bar{u}=1$, calcolare i corrispondenti valori di equilibrio delle variabili y e z.

SOLUZIONE DELL'ESERCIZIO 1

1.1) Per un sistema di ordine $n = 2$, come quello in esame, una condizione necessaria per l'asintotica stabilità è che risulti $\det(A) > 0$. Quindi, se il sistema è asintoticamente stabile deve essere

$$\alpha^2 - 12 > 0$$

ovvero

$$\alpha < -\sqrt{12} \qquad \text{oppure} \qquad \alpha > \sqrt{12}$$

1.2) Condizione necessaria e sufficiente per l'asintotica stabilità del sistema in esame è che le radici del polinomio

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^2 - 2\alpha\lambda + \alpha^2 - 12$$

abbiano entrambe parte reale negativa. A sua volta, questa condizione è equivalente a richiedere che i 3 coefficienti del polinomio siano diversi da zero e concordi in segno, Quindi

$$\begin{cases} -2\alpha > 0 \\ \alpha^2 - 12 > 0 \end{cases} \qquad \text{ovvero} \qquad \alpha < -\sqrt{12}$$

che è una condizione più restrittiva di quella ricavata al punto precedente.

1.3) La funzione di trasferimento è data da

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \begin{bmatrix} 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s-\alpha & -3 \\ -4 & s-\alpha \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} + 1 = \frac{30}{s^2 - 2\alpha s + \alpha^2 - 12} + 1 =$$

$$= \frac{s^2 - 2\alpha s + \alpha^2 + 18}{s^2 - 2\alpha s + \alpha^2 - 12}$$

1.4) Uguagliando a 10 il guadagno statico $\mu_s = G(0) = \dfrac{\alpha^2 + 18}{\alpha^2 - 12}$, si ottiene $\alpha^2 = \dfrac{46}{3}$. Ci sono pertanto 2 valori di α che risolvono il problema, $\alpha = \pm\sqrt{46/3}$.

In corrispondenza di $\alpha = -\sqrt{46/3}$ il sistema è asintoticamente stabile e quindi la risposta allo scalino tende asintoticamente a μ_s. Nel caso invece che sia $\alpha = \sqrt{46/3}$, il sistema è instabile e la risposta diverge.

SOLUZIONE DELL'ESERCIZIO 2

2.1) Gli stati di equilibrio si trovano risolvendo il sistema di equazioni

$$\begin{cases} x_1 = 0.1x_1(x_2+1) \\ x_2 = -0.5x_2(x_1-1) \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} x_1(1-0.1x_2-0.1)=0 \\ x_2(1+0.5x_1-0.5)=0 \end{cases}$$

Le due soluzioni sono

$$\bar{x}_A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \bar{x}_B = \begin{bmatrix} -1 \\ 9 \end{bmatrix}$$

2.2) La matrice dinamica del sistema linearizzato è data da

$$f_x(\bar{x},\bar{u}) = \begin{bmatrix} 0.1(x_2+1) & 0.1x_1 \\ -0.5x_2 & -0.5(x_1-1) \end{bmatrix}$$

In corrispondenza dello stato di equilibrio $\bar{x}_A$ si ottiene

$$f_x(\bar{x}_A,\bar{u}) = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

i cui autovalori sono entrambi minori di 1 in modulo. Pertanto $\bar{x}_A$ è asintoticamente stabile.
In corrispondenza dello stato di equilibrio $\bar{x}_B$ si ottiene invece

$$f_x(\bar{x}_B,\bar{u}) = \begin{bmatrix} 1 & -0.1 \\ -4.5 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \det\left(\lambda I - f_x(\bar{x}_B,\bar{u})\right) = \lambda^2 - 2\lambda + 0.55$$

e gli autovalori valgono $\lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{0.45}$. Essendo presente un autovalore con modulo maggiore di 1, lo stato di equilibrio $\bar{x}_B$ è instabile.

2.3) Applicando iterativamente le equazioni di stato si ottiene

$$x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad x_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \end{bmatrix} \quad , \quad x_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.25 \end{bmatrix} \quad , \quad \ldots \quad , \quad x_k = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5^k \end{bmatrix}$$

È quindi evidente che tale movimento converge a 0 per $k \to \infty$.

Alternativamente, si poteva anche osservare dalla prima equazione di stato che, partendo da $x_{1,0} = 0$, risulta $x_{1,k} = 0$, $\forall k \geq 0$. La seconda equazione, con ingresso costante, diventa quindi l'equazione lineare

$$x_{2,k+1} = 0.5x_{2,k}$$

la cui soluzione è evidentemente data dal movimento libero $x_{2,k} = 0.5^k x_{2,0} = 0.5^k$.

SOLUZIONE DELL'ESERCIZIO 3

3.1) I poli sono le radici del denominatore, cioè -4 e -1. L'unico zero è la radice del numeratore, cioè 0.
Il tipo è $g=-1$ e il guadagno è $\mu=10/12=5/6$.
Il guadagno statico è dato da $\mu_s=G(0)=0$.

3.2) La trasformata della risposta all'impulso è data da

$$Y(s)=G(s)=\frac{10s}{3(s+4)(s+1)}$$

Dal teorema del valore iniziale si ricava $y(0)=\lim_{s\to\infty} sY(s)=10/3$.

Il teorema del valore finale è applicabile perché i poli di $Y(s)$ hanno entrambi parte reale negativa. Applicandolo si ottiene $y(\infty)=\lim_{s\to 0} sY(s)=0$.

Se fosse $x(0)\neq 0$, bisognerebbe tener conto anche del movimento libero. Quindi risulterebbe

$$y(0)=10/3+Cx(0)$$

mentre, visto che il movimento libero di un sistema asintoticamente stabile tende asintoticamente a 0, il valore di $y(\infty)$ rimarrebbe invariato.

3.3) Mediante lo sviluppo di Heaviside si ricava

$$Y(s)=\frac{10s/3}{(s+4)(s+1)}=\frac{40/9}{s+4}-\frac{10/9}{s+1}$$

e pertanto, antitrasformando, la risposta all'impulso è data da

$$y(t)=\frac{40}{9}e^{-4t}-\frac{10}{9}e^{-t} \quad , \quad t\geq 0$$

3.4) Le istruzioni Matlab potrebbero essere le seguenti

```
>> num = [10 0]);
>> den = [3 15 12]);
>> sist = tf(num,den);
>> y = step(sist);
>> [A,B,C,D] = ssdata(sist);
```

SOLUZIONE DELL'ESERCIZIO 4

4.1) La funzione di trasferimento tra *u* e *y* è data da

$$G(s) = \frac{G_1(s)G_4(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)G_3(s)}$$

4.2) Sostituendo i valori delle $G_i(s)$ nell'espressione precedente e semplificando si ottiene

$$G(s) = \frac{s-2}{(s^2 - 2s + k)(s+h)}$$

Per l'asintotica stabilità del sistema complessivo occorre che tutti e 3 i poli abbiano parte reale negativa. Quindi è necessario che sia $h > 0$ (d'altra parte, il blocco $G_4(s)$ che è al di fuori dell'anello deve essere asintoticamente stabile). Poiché nel polinomio $s^2 - 2s + k$, per qualunque valore di *k*, i segni sono discordi, gli altri 2 poli non possono appartenere entrambi al semipiano sinistro. In conclusione, per nessun valore di *h* e *k* il sistema è asintoticamente stabile.

4.3) Le cancellazioni nascono quando numeratore e denominatore di $G(s)$ hanno radici in comune. Nel nostro caso ciò avviene se $h = -2$ oppure se $k = 0$. La presenza di cancellazioni implica l'esistenza di parti "nascoste" del sistema, che non entrano in gioco nella sua rappresentazione ingresso-uscita.

4.4) Per studiare lo schema a blocchi in condizioni di equilibrio, conviene sostituire ai blocchi $G_3(s)$ e $G_4(s)$ i rispettivi guadagni statici, ovvero $\mu_3 = -1/2$ e $\mu_4 = 1/h$ e osservare che $G_1(s)$ è un integratore, per cui all'equilibrio il suo ingresso deve essere nullo. Dallo schema risulta allora che, in condizioni di equilibrio,

$$\bar{u} + \frac{1}{2}\bar{z} = 0$$

da cui, ricordando che $\bar{u} = 1$, si ottiene $\bar{z} = -2$. Chiamando *w* l'ingresso di $G_4(s)$ (e assumendo $k \neq 0$) si ricava poi $\bar{w} = \bar{z}/k = -2/k$, e quindi $\bar{y} = \bar{w}/h = -2/kh$. Si noti tra l'altro che tale valore coincide con il guadagno statico $G(0)$ della funzione di trasferimento tra *u* e *y*.

Nel caso particolare $k = 0$, l'anello si apre e il valore all'equilibrio di *w* e di *y* è arbitrario.