FONDAMENTI DI AUTOMATICA

Anno Accademico 2014/15
Prova in itinere n.1
28 novembre 2014

Traccia della soluzione

ATTENZIONE!

I compiti utilizzati per la prova erano leggermente diversi tra di loro. In questo documento vengono presentati gli esercizi e le relative soluzioni per una sola tipologia di compito.

ESERCIZIO 1

Si consideri il sistema dinamico a tempo continuo:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \qquad A = \begin{bmatrix} -0.5 & -1.5 \\ -1.5 & -0.5 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$y(t) = Cx(t)$$

1.1) Calcolare determinante e traccia della matrice *A*. Dire se, sulla base di tali calcoli, si può concludere qualcosa sulla stabilità asintotica del sistema.

1.2) Spiegare cosa si intende per movimento libero dell'uscita e calcolarlo per il sistema in esame.

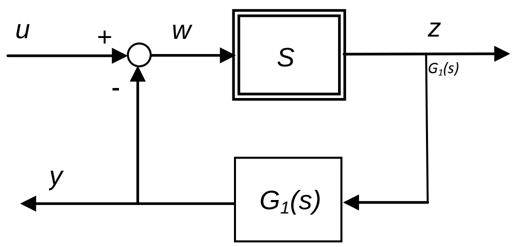
1.3) Calcolare la funzione di trasferimento del sistema. Da essa determinare il guadagno statico (se è ben definito) e verificare l'eventuale presenza di zeri.

1.4) Dire se è corretto affermare che, per il sistema in esame, il guadagno statico rappresenta il valore asintotico della risposta del sistema a un ingresso a scalino.

1.5) Spiegare come potrebbe essere utilizzata la funzione di trasferimento per calcolare la risposta del sistema all'ingresso $u(t) = e^{-t}\cos(3t)$. Non è richiesto il calcolo esplicito della risposta, ma si determinino il valore iniziale della risposta e della sua derivata e, se possibile, il valore asintotico.

ESERCIZIO 2

Si consideri lo schema a blocchi mostrato in figura, dove $G_1(s) = \dfrac{8}{s+2}$, mentre il blocco *S* rappresenta un sistema non dinamico che sarà precisato in seguito.



2.1) Si supponga dapprima che il blocco *S* sia descritto dalla relazione $z(t) = 2w(t)$. Calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ tra *u* e *y*.

2.2) Calcolare la risposta nel tempo dell'uscita *y* a uno scalino unitario dell'ingresso *u*.

2.3) Determinare una possibile rappresentazione di stato del sistema complessivo, considerando come variabili di uscita le variabili *y* e *z*.

2.4) Si supponga ora che il blocco *S* sia descritto dalla relazione $z(t) = 2w^2(t)$. Dire per quale valore di $\bar{u}$ il sistema complessivo ammette un unico stato di equilibrio.

2.5) In corrispondenza dell'unico stato di equilibrio determinato al punto precedente, scrivere le equazioni del sistema linearizzato.

ESERCIZIO 3

Si consideri il sistema a tempo discreto con 2 ingressi e un'uscita descritto dalle equazioni:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Fx_k + Gu_k + Hw_k \\ y_k &= Lx_k + Ju_k \end{aligned} \qquad F = \begin{bmatrix} 0.4 & -0.2 \\ -0.1 & 0 \end{bmatrix} \; , \; G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \; , \; H = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \; , \; L = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \; , \; J = -1$$

3.1) Determinare stato e uscita di equilibrio con $\bar{u} = -1$, $\bar{w} = 1$.

3.2) Giudicare la stabilità dello stato di equilibrio trovato.

3.3) Valutare se il sistema è strettamente proprio oppure no. Spiegare inoltre come questo si rifletta sulle caratteristiche della risposta all'impulso.

3.4) Calcolare la risposta dell'uscita y_k all'ingresso $u_k = \mathrm{imp}_k$ sia in forma analitica chiusa, sia in forma numerica per i primi istanti fino a $k = 3$. Si dica inoltre se, alla luce del risultato, il sistema può essere definito un sistema FIR.

ESERCIZIO 4

Si considerino le seguenti istruzioni Matlab e si individuino quelle la cui esecuzione produrrebbe un messaggio d'errore, spiegandone le ragioni.
Invece, per quelle corrette, si dica quale sarebbe il valore della variabile in uscita.

```
» w = eig([-5  0 ; 3  0]);

» w = inv([-5  1  2  3]);

» w = roots([-5  1 ; 2  3]);

» w = pole(ss(2, 1, -5, 3));
```

SOLUZIONE DELL'ESERCIZIO 1

1.1) Risulta $\mathrm{tr}(A) = -1$ e $\det(A) = -2$. Poiché il determinante è negativo si deduce che uno degli autovalori è negativo e pertanto il sistema è instabile.

1.2) Il movimento libero è la componente del movimento dell'uscita che dipende solo dallo stato iniziale. Perciò è il movimento dell'uscita che si avrebbe con ingresso nullo.
La formula per valutare il movimento libero dell'uscita è $y_l(t) = Ce^{At}x(0)$.
Per il calcolo di e^{At} si può ricorrere alla diagonalizzazione della matrice A. Gli autovalori di A sono -2 e 1. I rispettivi autovettori valgono $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.
Quindi risulta $e^{At} = Me^{\hat{A}t}M^{-1}$ dove $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $M^{-1} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & -0.5 \end{bmatrix}$, $\hat{A} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.
Osservando infine che $e^{\hat{A}t} = \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{t} \end{bmatrix}$, si ottiene

$$y_l(t) = 0.5\left(x_1(0)\left(e^{-2t} - e^{t}\right) + x_2(0)\left(e^{-2t} + e^{t}\right)\right)$$

1.3) La funzione di trasferimento è

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{-1.5}{s^2 + s - 2}$$

Essa ha guadagno statico $\mu = G(0) = 3/4$ e non presenta zeri.

1.4) L'affermazione non è corretta perché il sistema in esame è instabile e la risposta allo scalino diverge.

1.5) Dopo aver calcolato $U(s) = \dfrac{s+1}{(s+1)^2 + 9}$, si trova $Y(s) = G(s)U(s) = \dfrac{-1.5(s+1)}{\left(s^2 + s - 2\right)\left((s+1)^2 + 9\right)}$.
Poi, mediante lo sviluppo di Heaviside, si potrebbe valutare $y(t)$.
Per quanto riguarda i valori iniziali, si ottiene

$$y(0) = \lim_{s\to\infty} sY(s) = 0 \quad , \quad \dot{y}(0) = \lim_{s\to\infty} s^2 Y(s) = 0$$

Non è possibile invece calcolare il valore asintotico perché il teorema del valore finale non è applicabile, avendo $Y(s)$ un polo con parte reale positiva.

SOLUZIONE DELL'ESERCIZIO 2

2.1) La funzione di trasferimento tra *u* e *y* è $G(s) = \dfrac{2G_1(s)}{1+2G_1(s)} = \dfrac{16}{s+18}$.

2.2) La risposta allo scalino si calcola con lo sviluppo di Heaviside di $G(s)/s$. Risulta

$$Y(s) = \frac{16}{s(s+18)} = \frac{8/9}{s} - \frac{8/9}{s+18}$$

E quindi

$$y(t) = \frac{8}{9}\left(1 - e^{-18t}\right)$$

2.3) Scegliendo $x(t) = y(t)$, una possibile rappresentazione di stato è

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= -18x(t) + 16u(t) \\
y(t) &= x(t) \\
z(t) &= -2x(t) + 2u(t)
\end{aligned}$$

2.4) Il sistema è non lineare. La sua rappresentazione di stato è

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= -2x(t) + 16\left(u(t) - x(t)\right)^2 \\
y(t) &= x(t) \\
z(t) &= 2\left(u(t) - x(t)\right)^2
\end{aligned}$$

La condizione di equilibrio è $0 = -2x + 16(u-x)^2 = 16x^2 - (32u+2)x + 16u^2$. Per avere un unico stato di equilibrio occorre che il discriminante di questa equazione di secondo grado nell'incognita x sia uguale a 0. Ciò si verifica per $\bar{u} = -1/32$ e, in corrispondenza, lo stato di equilibrio è $\bar{x} = 1/32$.

2.5) Il sistema linearizzato è dato da

$$\begin{aligned}
\delta\dot{x}(t) &= \left(-2 - 32(\bar{u} - \bar{x})\right)\delta x(t) + 32(\bar{u} - \bar{x})\delta u(t) = -2\delta u(t) \\
\delta y(t) &= \delta x(t) \\
\delta z(t) &= -4(\bar{u} - \bar{x})\delta x(t) + 4(\bar{u} - \bar{x})\delta u(t) = \frac{1}{4}\delta x(t) - \frac{1}{4}\delta u(t)
\end{aligned}$$

SOLUZIONE DELL'ESERCIZIO 3

3.1) Per determinare stato e uscita di equilibrio occorre risolvere il sistema

$$\begin{aligned} x_1 &= 0.4x_1 - 0.2x_2 + 1 \\ x_2 &= -0.1x_1 \\ y &= x_2 + 1 \end{aligned}$$

Si trova così $\bar{x}_1 = 50/29$, $\bar{x}_2 = -5/29$, $\bar{y} = 24/29$.

3.2) Visto che il sistema è lineare, la stabilità dello stato di equilibrio coincide con quella del sistema. Il polimomio caratteristico associato alla matrice F è $\varphi(\lambda) = \lambda^2 - 0.4\lambda - 0.02$ e le sue radici hanno entrambe modulo minore di 1. Quindi il sistema è asintoticamente stabile.

3.3) Il sistema non è strettamente proprio perché l'uscita y_k dipende direttamente dall'ingresso u_k allo stesso istante. La risposta all'impulso risulta quindi diversa da 0, e pari a J , all'istante iniziale.

3.4) La formula della risposta è $y_k = \begin{cases} J & , \quad k = 0 \\ LF^{k-1}G & , \quad k > 0 \end{cases}$.

Numericamente, si ottiene:

$$y_0 = J = -1,\ y_1 = LG = 1,\ y_2 = LFG = 0,\ y_3 = LF^2G = 0.02$$

Il sistema non è un FIR perché la risposta all'impulso non si annulla in tempo finito. D'altra parte, gli autovalori non sono uguali a 0.

SOLUZIONE DELL'ESERCIZIO 4

```
» w = eig([-5  0 ; 3  0]);
```

Questa istruzione è corretta. Calcola gli autovalori della matrice $\begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$, che sono -5 e 0.

```
» w = inv([-5  1  2  3]);
```

Questa istruzione produce un messaggio di errore, visto che non si può calcolare l'inverso di un vettore.

```
» w = roots([-5  1 ; 2  3]);
```

Questa istruzione produce un messaggio di errore, visto che non ha senso calcolare le radici di una matrice.

```
» w = pole(ss(2, 1, -5, 3));
```

Questa istruzione è corretta. Calcola i poli (cioè gli autovalori) del sistema di ordine 1

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= 2x(t) + u(t) \\ y(t) &= -5x(t) + 3u(t) \end{aligned}$$

Il polo è unico e vale 2.