FONDAMENTI DI AUTOMATICA

Anno Accademico 2015/16
Prova in itinere n.1
27 novembre 2015

Traccia della soluzione

ATTENZIONE!

I compiti utilizzati per la prova erano leggermente diversi tra di loro. In questo documento vengono presentati gli esercizi e le relative soluzioni per una sola tipologia di compito.

ESERCIZIO 1

Si consideri il sistema dinamico a tempo continuo:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned} \qquad A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} \quad , \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

1.1) Calcolare gli stati e le uscite di equilibrio per un generico valore $\bar{u}$ dell'ingresso.

1.2) Calcolare il determinante della matrice A e, in base al valore ottenuto, dire cosa si può affermare sulla stabilità del sistema.

1.3) Calcolare la funzione di trasferimento del sistema.

1.4) Utilizzando le nuove variabili di stato $\hat{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x(t)$, ricavare una rappresentazione equivalente del sistema. Verificare poi che il guadagno statico si conserva.

ESERCIZIO 2

Si consideri il sistema dinamico a tempo continuo con ingresso u e uscita y descritto dalla funzione di trasferimento $G(s)=\dfrac{5}{s+4}$.

2.1) Determinare una possibile rappresentazione di stato.

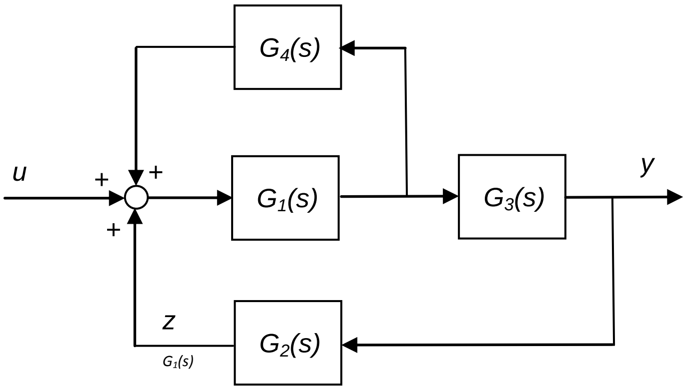
2.2) Mediante lo sviluppo di Heaviside calcolare la risposta $y(t)$ all'ingresso $u(t)=e^{t}, t\geq 0$, quando lo stato iniziale è nullo.

2.3) Con i rispettivi teoremi (se applicabili), determinare il valore iniziale e il valore finale della risposta $y(t)$ calcolata al punto precedente.

2.4) Dire cosa cambierebbe nella risposta $y(t)$ se lo stato iniziale fosse $x(0)=0.3$.

ESERCIZIO 3

Si consideri lo schema a blocchi mostrato in figura.



3.1) Calcolare la funzione di trasferimento da *u* a *y*.

3.2) Supponendo che sia $G_1(0)=1$, $G_2(0)=2$, $G_3(0)=3$, $G_4(0)=4$, calcolare il valore di equilibrio $\bar{y}$ quando l'ingresso è $\bar{u}=10$.

3.3) Riguardo alla precedente domanda, cosa cambierebbe se, a parità di tutto il resto, la funzione di trasferimento $G_4(s)$ avesse tipo $g_4=-2$?

3.4) Calcolare la funzione di trasferimento da *u* a *z*.

ESERCIZIO 4

Si consideri il sistema non lineare a tempo discreto (senza ingressi) descritto dalle equazioni:

$$
\begin{aligned}
&p_{k+1} = 0.2\, p_k q_k \\
&q_{k+1} = p_k \\
&y_k = 5 p_k^2
\end{aligned}
$$

4.1) Determinare tutti gli stati e le uscite di equilibrio.

4.2) Scrivere le equazioni del modello linearizzato intorno allo stato di equilibrio diverso da zero.

4.3) Valutare la stabilità di tale equilibrio.

4.4) Supponendo $p_0 = 5$, $q_0 = 4$ e usando il modello non lineare, determinare i valori di y_k negli istanti $k = 0, 1, 2$.

4.5) Usando il modello linearizzato, ricavare una valutazione approssimata degli stessi valori di y_k del punto precedente.

SOLUZIONE DELL'ESERCIZIO 1

1.1) Annullando le derivate rispetto al tempo e risolvendo il sistema lineare risultante si ottiene:

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} -6 \\ -10 \end{bmatrix} \bar{u} \quad , \quad \bar{y} = \begin{bmatrix} -6 \\ -6 \end{bmatrix} \bar{u}$$

1.2) Risulta $\det(A) = -2 < 0$. Viene quindi violata la condizione $(-1)^n \det(A) > 0$, necessaria per l'asintotica stabilità, e dunque il sistema non è asintoticamente stabile. D'altra parte, se il determinante è negativo significa che gli autovalori sono reali e discordi in segno, per cui esiste almeno un autovalore positivo.

1.3) Si ricava

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \frac{1}{s^2 + 3s - 2} \begin{bmatrix} s & 2 \\ 1 & s+3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{2s+12}{s^2+3s-2} \\ \dfrac{4s^2+18s+12}{s^2+3s-2} \end{bmatrix}$$

La funzione di trasferimento è rappresentata da un vettore perché il sistema ha 2 uscite e 1 ingresso. Ciascuna componente rappresenta l'effetto dell'ingresso su una delle due uscite.

1.4) Il guadagno statico del sistema è $\mu_s = \begin{bmatrix} -6 \\ -6 \end{bmatrix}$, come si vede dal punto 1.1 e anche calcolando $G(0)$.

Definendo con $T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ la matrice di trasformazione delle variabili di stato e con $T^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$ la sua inversa, la rappresentazione equivalente è data da:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= \hat{A}\hat{x}(t) + \hat{B}u(t) \\ y(t) &= \hat{C}\hat{x}(t) + \hat{D}u(t) \end{aligned}$$

con $\hat{A} = TAT^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$, $\hat{B} = TB = \begin{bmatrix} -4 \\ 8 \end{bmatrix}$, $\hat{C} = CT^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$, $\hat{D} = D = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$.

In corrispondenza di tali valori, il guadagno statico risulta essere

$$\hat{\mu}_s = -\hat{C}\hat{A}^{-1}\hat{B} + \hat{D} = -\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1/2 \\ -1 & 3/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ -6 \end{bmatrix}$$

e quindi si conserva.

SOLUZIONE DELL'ESERCIZIO 2

2.1) Una possibile rappresentazione di stato è data da:

$$\dot{x}(t) = -4x(t) + 5u(t)$$
$$y(t) = x(t)$$

2.2) Si ricava $Y(s) = G(s)U(s) = \dfrac{5}{(s+4)(s-1)}$.

Mediante lo sviluppo di Heaviside si ottiene $Y(s) = \dfrac{-1}{(s+4)} + \dfrac{1}{(s-1)}$ e quindi $y(t) = -e^{-4t} + e^{t}$, $t \geq 0$.

2.3) Il teorema del valore iniziale consente di calcolare $y(0) = \lim_{s\to\infty} sY(s) = 0$, che è coerente con l'espressione di $y(t)$ ricavata in precedenza.

Il teorema del valore finale non è invece applicabile per la presenza in $Y(s)$ di un polo con parte reale positiva. D'altra parte la funzione $y(t)$ diverge per $t \to \infty$.

2.4) In tal caso l'andamento di $y(t)$ conterrebbe anche la componente libera. Quindi si avrebbe, per $t \geq 0$,

$$y(t) = y_f(t) + y_l(t) = \left(-e^{-4t} + e^{t}\right) + Ce^{At}x(0) = \left(-e^{-4t} + e^{t}\right) + 0.3e^{-4t} = -0.7e^{-4t} + e^{t}$$

SOLUZIONE DELL'ESERCIZIO 3

3.1) Dallo schema a blocchi si ricava:

$$G_{yu}(s)=\frac{G_3(s)\dfrac{G_1(s)}{1-G_1(s)G_4(s)}}{1-G_2(s)G_3(s)\dfrac{G_1(s)}{1-G_1(s)G_4(s)}}=\frac{G_1(s)G_3(s)}{1-G_1(s)G_4(s)-G_1(s)G_2(s)G_3(s)}$$

3.2) Il guadagno statico tra *u* e *y* risulta:

$$\mu_{yu}=G_{yu}(0)=\frac{G_1(0)G_3(0)}{1-G_1(0)G_4(0)-G_1(0)G_2(0)G_3(0)}=\frac{3}{1-4-6}=-\frac{1}{3}$$

Pertanto, all'equilibrio $\bar{y}=\mu_{yu}\bar{u}=-\dfrac{10}{3}$.

3.3) In questo caso sarebbe $G_4(0)=0$ e quindi $\mu_{yu}=G_{yu}(0)=\dfrac{3}{1-6}=-\dfrac{3}{5}$ e $\bar{y}=\mu_{yu}\bar{u}=-6$.

3.4) Dallo schema a blocchi si ricava:

$$G_{zu}(s)=\frac{G_2(s)G_3(s)\dfrac{G_1(s)}{1-G_1(s)G_4(s)}}{1-G_2(s)G_3(s)\dfrac{G_1(s)}{1-G_1(s)G_4(s)}}=\frac{G_1(s)G_2(s)G_3(s)}{1-G_1(s)G_4(s)-G_1(s)G_2(s)G_3(s)}$$

SOLUZIONE DELL'ESERCIZIO 4

4.1) All'equilibrio deve risultare:

$$p = 0.2\,pq$$
$$q = p$$
$$y = 5p^2$$

Pertanto il sistema possiede i due seguenti stati (e corrispondenti uscite) di equilibrio:

$$\bar{p} = 0 \qquad \bar{p} = 5$$
$$\bar{q} = 0 \quad \text{e} \quad \bar{q} = 5$$
$$\bar{y} = 0 \qquad \bar{y} = 125$$

4.2) Il modello linearizzato intorno al secondo stato di equilibrio è dato da

$$\delta p_{k+1} = 0.2\bar{q}\,\delta p_k + 0.2\,\bar{p}\,\delta q_k = \delta p_k + \delta q_k$$
$$\delta q_{k+1} = \delta p_k$$
$$\delta y_k = 10\,\bar{p}\,\delta p_k = 50\delta p_k$$

4.3) Per valutare la stabilità del secondo equilibrio si calcolino gli autovalori della matrice dinamica del modello linearizzato, ovvero $F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Poiché risulta $\varphi(\lambda) = \det(\lambda I - F) = \lambda^2 - \lambda - 1$, i due autovalori sono $\lambda_{1,2} = \left(1 \pm \sqrt{5}\right)/2$. Uno dei due autovalori ha modulo maggiore di 1 e quindi lo stato di equilibrio considerato risulta instabile.

4.4) Usando iterativamente le equazioni del sistema non lineare si ottiene:

$$p_0 = 5,\ q_0 = 5,\ y_0 = 125$$
$$p_1 = 4,\ q_1 = 5,\ y_1 = 80$$
$$p_2 = 4,\ q_2 = 4,\ y_2 = 80$$

4.5) Si osservi dapprima che risulta $\delta p_0 = p_0 - \bar{p} = 0$, $\delta q_0 = q_0 - \bar{q} = -1$. Pertanto, usando iterativamente le equazioni del modello linearizzato si ottiene:

$$\delta p_0 = 0,\ \delta q_0 = -1,\ \delta y_0 = 0,\ \tilde{y}_0 \cong \bar{y} + \delta y_0 = 125$$
$$\delta p_1 = -1,\ \delta q_1 = 0,\ \delta y_1 = -50,\ \tilde{y}_1 \cong \bar{y} + \delta y_1 = 75$$
$$\delta p_2 = -1,\ \delta q_2 = -1,\ \delta y_2 = -50,\ \tilde{y}_2 \cong \bar{y} + \delta y_2 = 75$$

Si noti che, al contrario di $\tilde{y}_0 = y_0$, i valori $\tilde{y}_1$ e $\tilde{y}_2$ sono in effetti un po' diversi rispetto ai valori "veri" y_1 e y_2. Questo è l'effetto dell'approssimazione introdotta dalla linearizzazione.